

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Донской государственный технический университет»

Утверждено на заседании кафедры
технической механики

6 марта 2021 г.

КУРС ЛЕКЦИЙ
СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

для самостоятельной работы для обучающихся заочной формы обучения по
программам подготовки: 08.03.01 Все программы ПГС, ЭУН, АД, АСПП
21.05.01 ПГ

Авторы:

д.т.н., проф. Панасюк Л.Н.,
К.т.н., доц., Кравченко Г.М.,
К.т.н., доц., Труфанова Е.В.
Ст. преподав. Тюрина В.С.

Ростов-на-Дону

2021

Оглавление

Опоры	3
Геометрический анализ изменяемости стержневых систем	5
Расчет многопролетных статически определимых балок	7
Расчёт стержневых конструкций на действие подвижной нагрузки.....	9
Линии влияния опорных реакций	9
Расчет распорных систем.....	12
Расчёт трёхшарнирной арки на подвижную нагрузку.....	14
ПЛОСКИЕ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ БАЛОЧНЫЕ ФЕРМЫ	23
Понятие о ферме	23
Линии влияния усилий в стержнях ферм	24
Загружение линий влияния усилий в стержнях ферм.....	30
Определение перемещений.	31
Интеграл Мора	31
Порядок определения перемещений:	33
Правило П. Верещагина	33
РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ	40
Понятие о статической неопределимости	40
Основная система метода сил	41
Канонические уравнения метода сил	43
Определение коэффициентов канонических уравнений	44
Построение эпюр внутренних усилий в заданной системе	46
Расчёт статически неопределимых рам методом сил на температурные воздействия	47
Проверки правильности построенных эпюр:	53
•Статическая проверка.....	53
Расчёт статически неопределимой рамы на осадку опор	55
РАСЧЁТ НЕРАЗРЕЗНЫХ БАЛОК.....	59
Уравнение трех моментов	59
Расчет статически неопределимых систем методом перемещений	64
Основы метода	64
Выбор основной системы	65
Канонические уравнения метода перемещений	68
Решение системы канонических уравнений и построение эпюр внутренних усилий	74

Опоры

Для того чтобы в процессе создания и последующей эксплуатации сооружение оставалось геометрически неизменяемым и неподвижным по отношению к основанию (как говорят в строительной механике, к земле), сооружение с землёй соединяют специальными устройствами, называемыми опорами, каждая из которых лишает сооружение определённого числа степеней свободы. Всякое устройство, отнимающее у жёсткого диска одну степень свободы, называется простой кинематической связью.

В опорах возникают опорные реакции, которые вместе с внешними нагрузками создают уравновешенную систему сил, действующую на сооружение.

В строительной механике различают три типа опор, состоящих из определённого числа простых кинематических связей. Кинематическая связь представляет собой прямолинейный стержень, ограниченный с обеих сторон шарнирами. Шарниры бывают простыми, когда они соединяют два стержня, и кратными, когда они соединяют более чем два стержня (рис.1.2). Кратность шарнира определяется числом стержней, сходящихся в нём, без единицы.

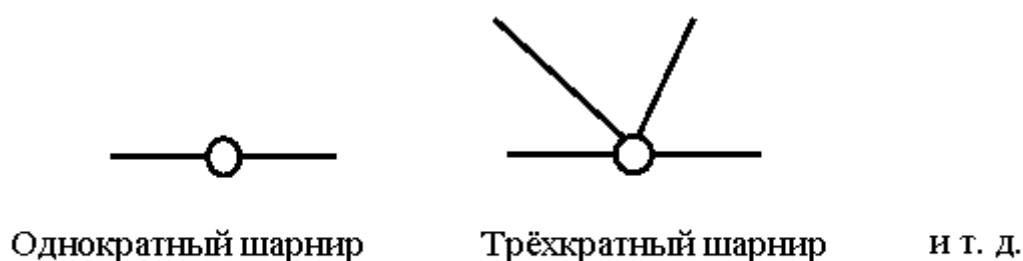


Рис. 1.2

Каждый простой шарнир предполагает наличие в нём двух простых кинематических связей.

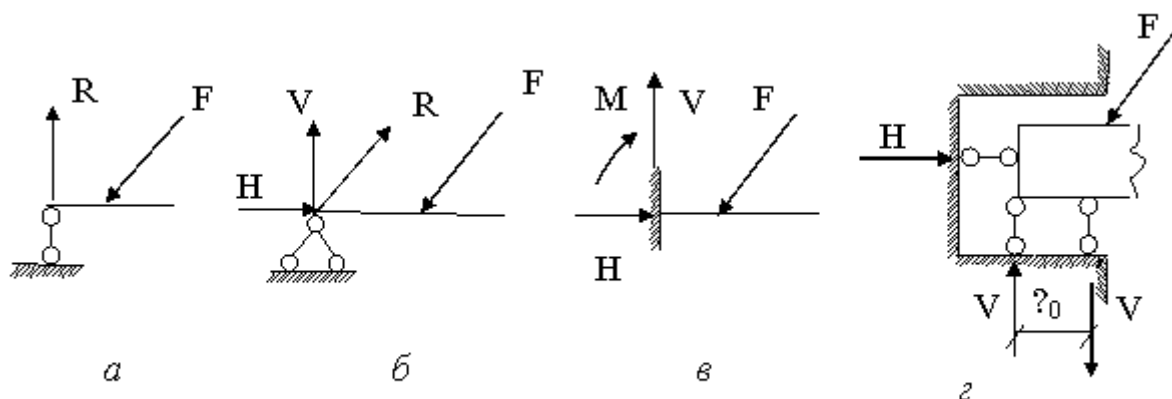


Рис. 1.3

Шарнирно-подвижная опора (рис. 1.3, а) состоит из одной простой кинематической связи. Такая опора лишает диск на плоскости одной степени свободы, то есть она не даёт возможности поступательного перемещения вдоль продольной оси этой опорной связи. При любом характере нагружения диска внешней нагрузкой опорная реакция R в шарнирно-подвижной опоре может быть направлена только вдоль оси этой простой кинематической связи и перпендикулярно продольной оси диска.

Шарнирно-неподвижная опора (рис. 1.3, б) состоит из двух простых кинематических связей. При таком характере прикрепления диска к земле опорная реакция R может быть направлена под углом к продольной оси диска. Такую опорную реакцию разлагают на две взаимно-перпендикулярные составляющие – вертикальную V и горизонтальную H . Шарнирно-неподвижная опора отнимает у диска на плоскости две степени свободы, лишая его возможности поступательного перемещения по двум взаимно-перпендикулярным направлениям.

Жёсткая заделка (защемление) предполагает наличие в ней трёх простых кинематических связей (рис. 1.3, в), отнимающих у диска на плоскости три степени свободы, лишая его возможности как поступательных, так и угловых перемещений. При таком закреплении диска возникающую опорную реакцию раскладывают на три составляющие – V , H и M . Характер возникновения опорного момента $M = V \cdot l_0$ иллюстрируется шарнирно-стержневым эквивалентом защемления (рис. 1.3, г).

При этом величина опорного момента равна $M = V \cdot l_0$.

Механическое состояние не изменится, если освободить ее от связей, приложив к точкам системы силы, равные реакциям связей. Эту аксиому называют аксиомой о связях. Материальные тела, ограничивающие перемещение данного тела в пространстве, называют связями. Сила, с которой связь действует на тело, препятствуя его перемещению, называется силой реакцией связи, или просто реакцией связи.

Геометрический анализ изменяемости стержневых систем

Число степеней свободы n сооружения в целом может быть определено по формуле П.Л. Чебышева

$$n = 3Д - 2Ш - C_0. \quad (1.1)$$

Каждая цифра и символ этой формулы несут свою смысловую нагрузку: $Д$ описывает число жёстких дисков рассматриваемой стержневой системы; 3 означает, что каждый диск на плоскости обладает тремя степенями свободы; $Ш$ описывает число простых шарниров; 2 со знаком минус означает, что каждый простой шарнир «отнимает» у жёсткого диска на плоскости две степени свободы, т. е. предотвращает возможность поступательных перемещений диска по двум взаимно-перпендикулярным направлениям; C_0 описывает число простых кинематических связей; 1 и знак минус означает, что каждая простая кинематическая связь «отнимает» у жёсткого диска одну степень свободы, т.е. предотвращает возможность линейного перемещения диска вдоль стержня простой кинематической связи. Поместив начало системы координат в центре тяжести крайнего левого поперечного сечения балки, и рассекая ее в пределах участка I , рассмотрим равновесие левой части балки длиной z_1

Для кинематического анализа таких стержневых систем, как фермы, удобно пользоваться формулой

$$n = 2У - C_{\phi} - C_0, \quad (1.2)$$

где $У$ описывает число узлов фермы, а 2 означает, что каждый узел фермы на плоскости обладает двумя степенями свободы; C_{ϕ} и C_0 описывают число стержней фермы и число опорных простых кинематических связей соответственно; -1 перед ними означает, что каждый стержень налагает на координаты узлов фермы условие постоянства расстояния между узлами фермы. Если в результате определения числа степеней свободы (степени изменяемости) стержневой системы оказывается, что $n > 0$, то система считается изменяемой, так как она не обладает необходимым минимумом связей. Такая система является геометрически изменяемой и не может быть использована в качестве сооружения.

Система, для которой $n = 1$, называется механизмом и она тоже не может быть использована в качестве сооружения. Случай, когда $n = 0$, означает, что рассматриваемая система обладает необходимым минимумом связей и при определённых условиях может быть использована в качестве сооружения. При $n < 0$ рассматриваемая система обладает числом связей больше необходимого минимума. Естественно, что такая система может быть использована в качестве сооружения. Последнее условие $n < 0$ является необходимым, но недостаточным для точной оценки геометрической изменяемости стержневой системы, поскольку геометрическая изменяемость стержневой системы зависит не только от числа связей, но и от их расположения.

Для полной оценки изменяемости стержневой системы необходимо соблюдать следующие принципы образования геометрически неизменяемых систем:

1) присоединение к жёсткому диску системы двухстержневого звена (диады) не изменяет степени свободы стержневой системы (рис. 1.4, а);

- 2) два жёстких диска могут быть соединены жёстко с помощью шарнира С и стержня АВ, ось которого не проходит через центр шарнира (рис. 1.4, б);
- 3) два жёстких диска могут быть соединены геометрически неизменяемо друг с другом тремя стержнями, оси которых не пересекаются в одной точке (рис. 1.4, в);
- 4) три жёстких диска (или стержня) можно соединить в геометрически неизменяемую систему с помощью трёх шарниров, не лежащих на одной прямой.

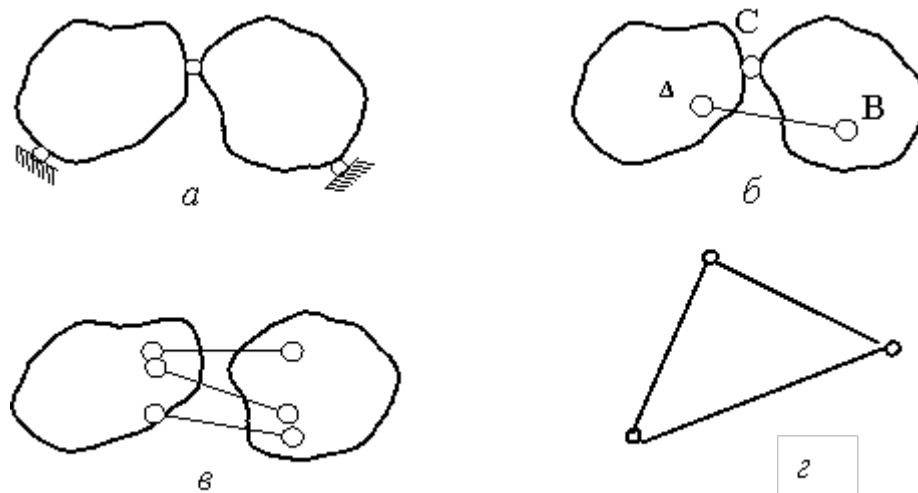


Рис. 1.4

Несоблюдение указанных принципов образования геометрически неизменяемых систем может привести не только к появлению просто геометрически неизменяемой системы, но и к так называемой мгновенно изменяемой системе. Рассмотрим всегда геометрически неизменяемую двухстержневую систему АСВ, нагруженную в шарнире С сосредоточенной силой F так, как это показано на рис. 1.5.

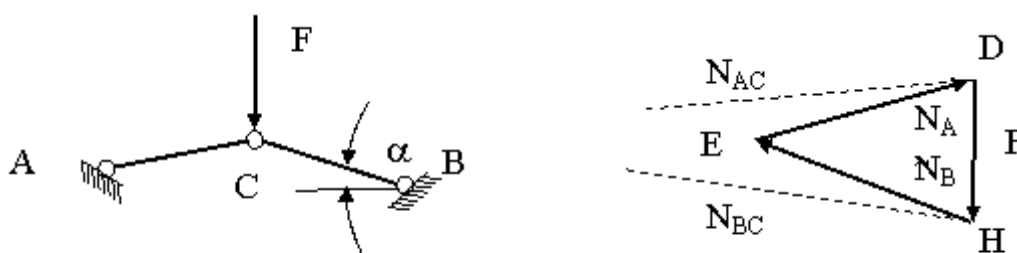


Рис. 1.5

На построенном силовом треугольнике сторона ДЕ параллельна стержню АС и длина её в соответствии с принятым масштабом сил равна величине продольного усилия N_{AC} , а длина ВС соответственно равна величине N_{BC} . При уменьшении угла α , что видно из силового треугольника, величины усилий N_{AC} и N_{BC} при неизменности значения силы F

будут увеличиваться и в какое-то мгновение, когда все три шарнира окажутся на одной прямой, величины этих усилий станут равными бесконечности и стержни разрушатся. Вот почему мгновенно изменяемые системы не могут быть использованы в качестве строительных конструкций.

Механическое состояние не изменится, если освободить ее от связей, приложив к точкам системы силы, равные реакциям связей. Эту аксиому называют аксиомой о связях. Материальные тела, ограничивающие перемещение данного тела в пространстве, называют связями. Сила, с которой связь действует на тело, препятствуя его перемещениям, называется силой реакции связи, или просто реакцией связи.

Расчет многопролетных статически определимых балок

Расчёт многопролётных статически определимых балок на действие статической нагрузки

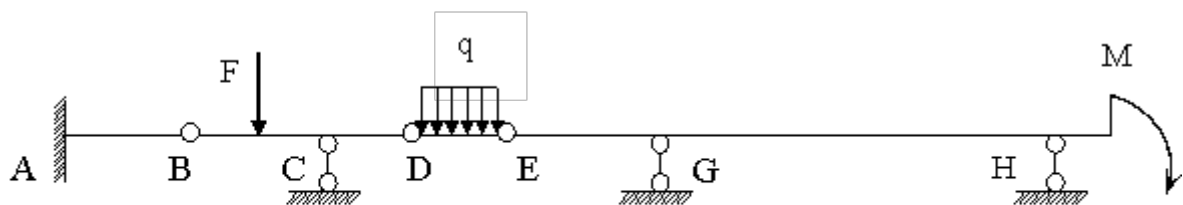


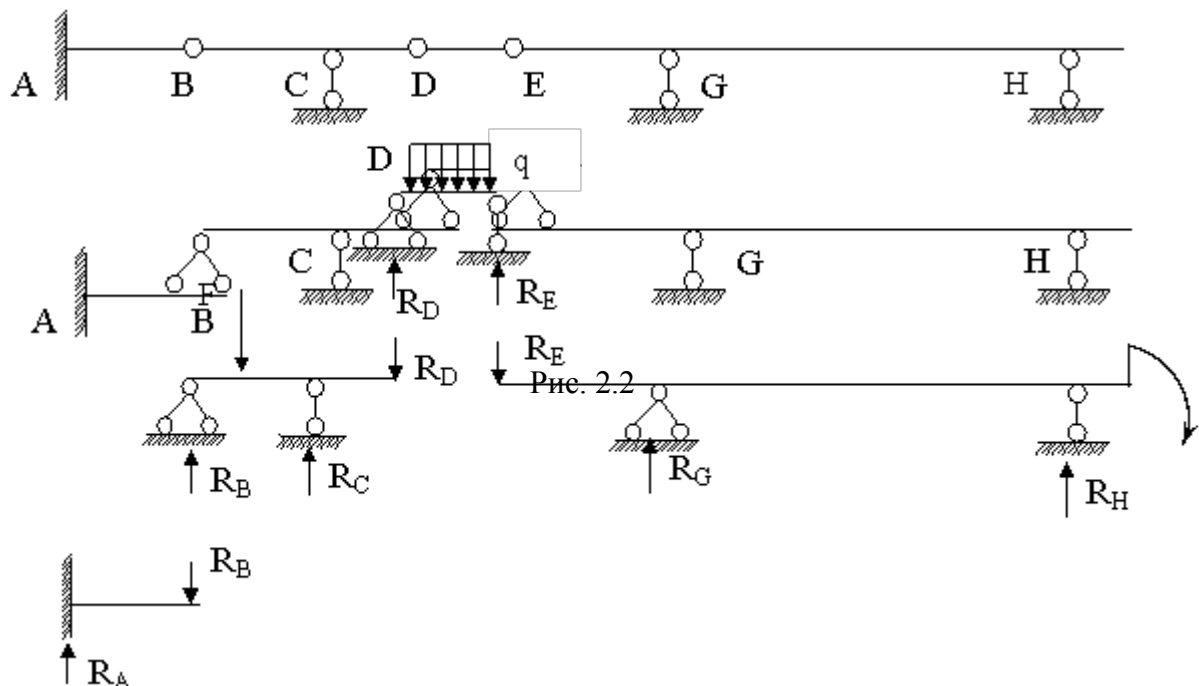
Рис. 2.1

Количество необходимых шарниров можно определить по формуле (1.1). Известно, что для жёсткого прикрепления балки к земле необходимо минимум три простые кинематические связи. Число простых кинематических связей, превышающих этот минимум, равно числу шарниров, которые надо ввести в неразрезную балку, чтобы превратить её в многопролётную статически определимую балку. При постановке этих шарниров необходимо придерживаться следующих правил: 1) если крайний пролёт неразрезной балки имеет шарнирное опирание, то в нём должно быть не более одного шарнира; 2) если крайний пролёт неразрезной балки зашкреплён, в нём должно быть не более двух шарниров; 3) если в одном из пролётов неразрезной балки стоит два шарнира, то должен быть обязательно один пролёт, в котором нет шарниров.

Расчёт многопролётной статически определимой балки на действие статической нагрузки удобно вести с использованием так называемой этажной схемы. При построении этажной схемы из многопролётной балки выбирают основную и дополнительные балки (рис. 2.2).

При этом основной считается та балка, которая прикреплена к земле тремя связями. В многопролётной балке может быть одна или несколько основных

балок. Дополнительными считаются те балки, которые прикреплены частью связей к основной балке, а частью – к земле либо всеми связями прикреплены к основной балке. В схеме, представленной на рис. 2.2, основными являются балки АВ и GH, а дополнительными – все остальные.



Взаимодействие балок между собой при действии на них статической нагрузки иллюстрируется на рис. 2.3. Следует отметить, что горизонтальная простая кинематическая связь шарнира E принадлежит балке GH, что и отражено на рис. 2.3.

Из анализа рис. 2.3 очевидно, что расчёт многопролётных статически определимых балок необходимо начинать с дополнительных, так как опорные реакции таких балок являются внешней нагрузкой для балок, на которые они опираются.

Механическое состояние не изменится, если освободить ее от связей, приложив к точкам системы силы, равные реакциям связей. Эту аксиому называют аксиомой о связях. Материальные тела, ограничивающие перемещение данного тела в пространстве, называют связями. Сила, с которой связь действует на тело, препятствуя его перемещению, называется силой реакции связи, или просто реакцией связи.

Расчёт стержневых конструкций на действие подвижной нагрузки

К подвижной нагрузке, оказывающей внешнее силовое воздействие на сооружения, относят автомобильный и железнодорожный транспорт, мостовые краны и т.д.

Особенностью расчёта сооружений на подвижную нагрузку является то, что для оценки напряжённо-деформированного состояния во всех поперечных сечениях по длине сооружения необходимо фиксировать бесконечно большое число раз подвижную нагрузку, превращая её в статическую. Такой расчёт, естественно, нерационален. Поэтому при расчёте сооружений на подвижную нагрузку не строят эпюры внутренних усилий, описывающих их изменение по длине сооружения.

Для решения этой задачи в строительной механике разработан аппарат линий влияния. Линией влияния называется график изменения какого-либо параметра (момент, сила, напряжение, перемещение и т.д.) в зависимости от положения безразмерной силы. Таким образом, линия влияния (л.в.) описывает изменение изучаемого параметра в каком-то конкретном сечении. Физический смысл ординаты л.в. заключается в том, что такая ордината описывает величину того параметра л. в., для которого она построена (рис. 2.4).

Линии влияния опорных реакций

Известно, что любой расчёт конструкции начинают с определения опорных реакций. Не является исключением и расчёт, связанный с построением линий влияния.

Рассмотрим построение линий влияния опорных реакций для двухопорной балки. Поместим на неё силу F , движение которой по балке будем описывать изменением координаты x (см. рис. 2.4). При фиксированном положении силы составим уравнение моментов относительно шарнира B , как и при обычном расчёте:

$$\sum M_B = R_A \ell - F(\ell - x) = 0 \Rightarrow R_A = F \frac{\ell - x}{\ell}. \quad (2.1)$$

Из анализа выражения (2.1) очевидно, что оно описывает прямую линию. Тогда из (2.1) при $x = 0$ и с учётом найдём, что $R_A = 1$, а при $x = \ell$ $R_A = 0$. Составляя аналогичное уравнение моментов относительно шарнира A , можно построить линию влияния опорной реакции R_B . В строительной механике принято положительные ординаты линии влияния откладывать вверх от базовой линии.

Эти же линии влияния можно построить, вообще не осуществляя аналитических выводов. Ясно, что в тот момент времени, когда подвижная сила окажется над опорой A , будет восприниматься только опорой A , опорная

реакция которой будет равна 1, тогда как опорная реакция на опоре В в этот же момент времени будет равна 0. При этом известно, что если между двумя шарнирами нет нагрузки, то любое внутреннее усилие на таком участке стержня будет изменяться по закону прямой линии.

Если рассматривать балку с двумя консолями (рис. 2.5), то уравнения для реакции будут такими же, что и для балки без консолей.

Учитывая, что зависимость между опорными реакциями R_A и R_B и координатой x является функцией первой степени (см. выражение (2.1), то, продолжая прямые линии на консоли, получают линии влияния опорных реакций R_A и R_B . Форма линий влияния R_A и R_B и значения их ординат показаны на рис. 2.5.

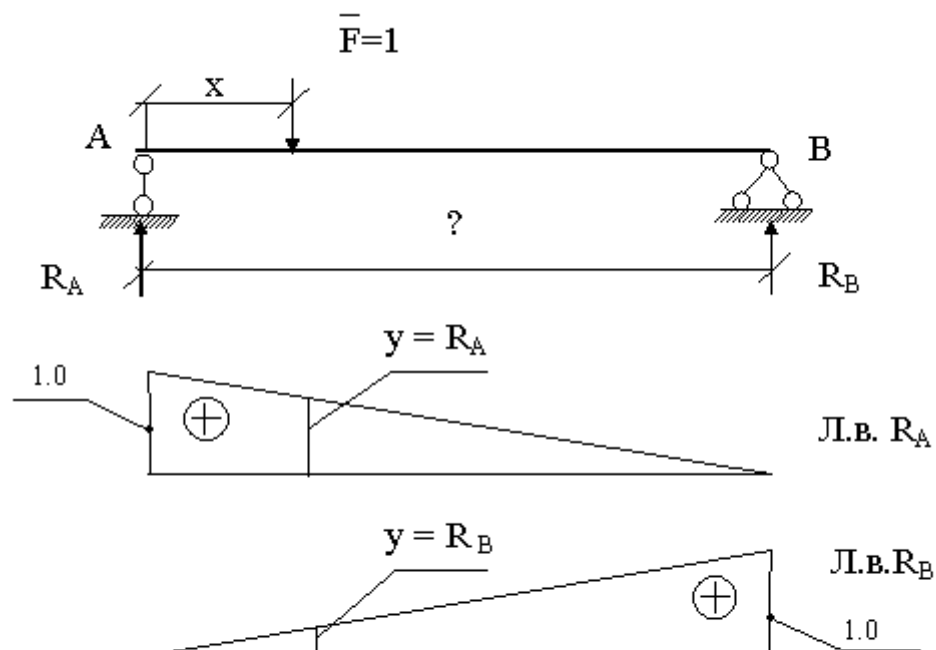


Рис. 2.4

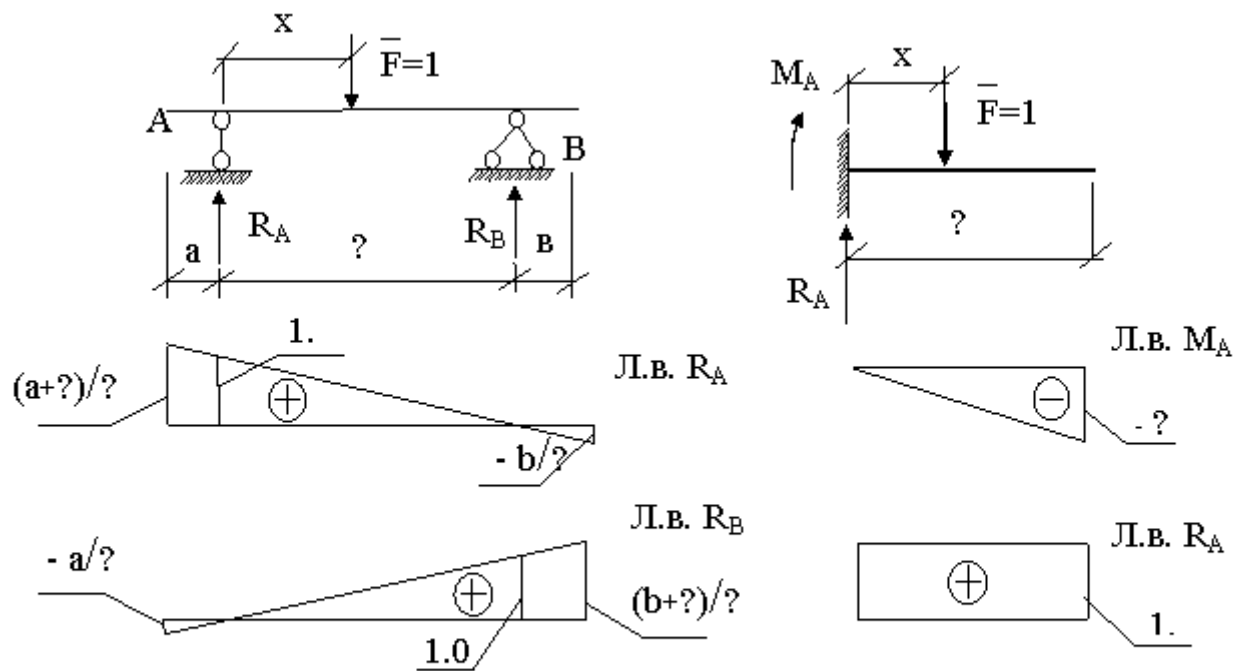


Рис. 2.5

Рис. 2.6

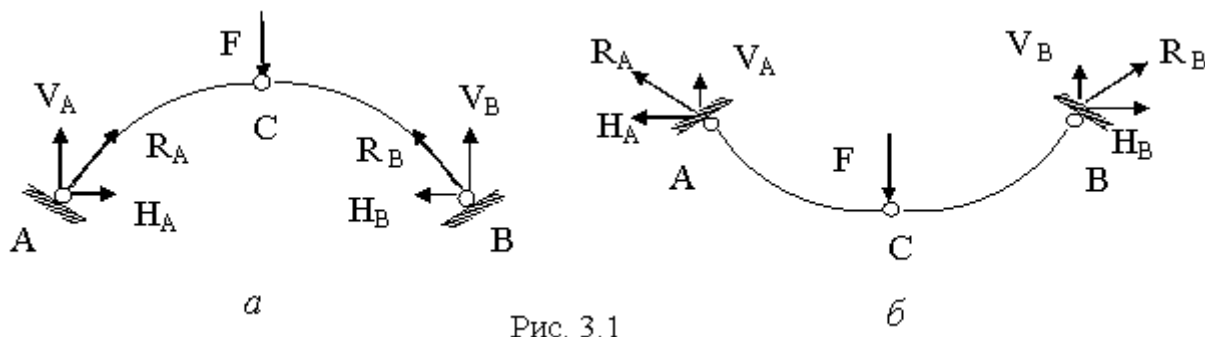
Построим линии влияния опорных реакций защемлённой балки, изображённой на рис. 2.6. В защемлении возникают две опорные реакции: M_A и R_A . Из условия равновесия $\sum M_A = 0$ получаем $M_A +$

$+F \cdot x = 0 \Rightarrow M_A = -x$. Тогда при $x = 0$ $M_A = -\ell$. Из уравнения проекций $\sum Y = -F + R_A = 0 \Rightarrow R_A = 1$.

На рис. 2.6 показаны формы и значения ординат линий влияния опорных реакций M_A и R_A для консольной балки.

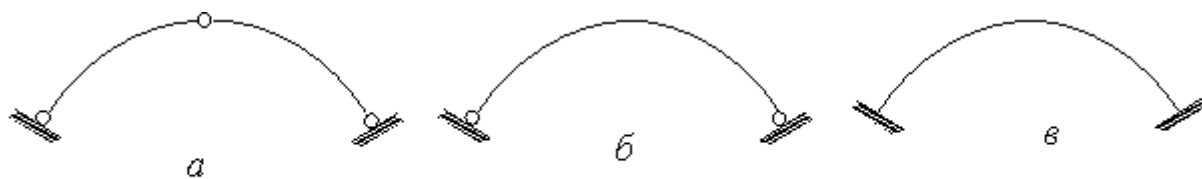
Расчет распорных систем

Распорной называется такая система, в результате действия на которую вертикальных внешних нагрузок в ней возникают наклонные опорные реакции. На рис. 3.1 показаны два типа распорных систем.



При расчёте распорных систем наклонную опорную реакцию R раскладывают на две составляющие: вертикальную V и горизонтальную H . Горизонтальная составляющая H опорной реакции называется распором. Если горизонтальная составляющая H направлена вовнутрь конструкции, то такую конструкцию называют арочной системой (рис. 3.1, а), если наружу – висячей системой (рис. 3.1, б). В настоящем курсе рассматривается только арочная система (арка).

По степени статической определимости различают арки: трёхшарнирные (рис. 3.2, а), двухшарнирные (рис. 3.2, б) и бесшарнирные (рис. 3.2, в).



Арки могут быть как сплошными, так и решётчатыми. Опоры арки могут располагаться как в одном уровне, так и в разных уровнях.

Конструктивные элементы арки показаны на рис. 3.3: ℓ – пролёт арки; f – стрела подъёма арки; шарниры А и В называются пятовыми, а шарнир С – замковым. Элемент арки между шарнирами А и С называется левой полуаркой, а между шарнирами В и С – правой полуаркой.

По отношению стрелы подъёма арки к её длине различают следующие типы

арок: $\frac{f}{\ell} > \frac{1}{5}$ – подъёмистая арка; $\frac{f}{\ell} < \frac{1}{5}$ – пологая арка.

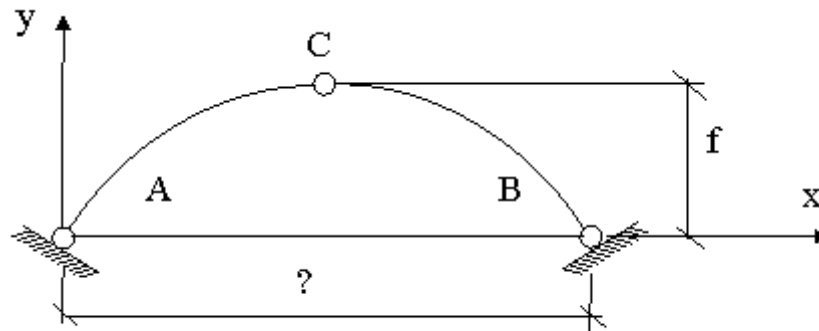


Рис. 3.3

Ось арки может быть очерчена различными кривыми. Наиболее часто в практике транспортного строительства используется парабола, описанная выражением (3.1), и дуга окружности, описанная выражением (3.2).

$$y = \frac{4f}{\ell^2} x(\ell - x) \quad \text{– парабола. (3.1)}$$

Тригонометрические функции, соответствующие параболе, имеют следующий

$$\text{вид: } \operatorname{tg} \varphi = \frac{4f}{\ell^2} (\ell - 2x); \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}; \quad \sin \varphi = \cos \varphi \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$

$$y = \sqrt{R^2 - \left(\frac{\ell}{2} - x\right)^2} - R + f \quad \text{– дуга окружности. (3.2)}$$

Тригонометрические функции, соответствующие дуге окружности, имеют такой

$$\text{вид: } R = \frac{f}{2} + \frac{\ell^2}{8f}; \quad \sin \varphi = \frac{\ell - 2x}{2R}; \quad \cos \varphi = \frac{y + R - f}{R}. \quad \text{В последних формулах } R \text{ – радиус окружности.}$$

Расчёт трёхшарнирной арки на подвижную нагрузку

Расчёт на подвижную нагрузку предполагает построение линий влияния всех искомых параметров, определяющих напряжённо-деформированное состояние рассчитываемой конструкции.

Как обычно, расчёт начинают с построения линий влияния опорных реакций. Линии влияния вертикальных V_A и V_B составляющих опорных реакций (рис. 3.6) строят так же, как строят линии влияния опорных реакций в двухопорной без консолей балке. При этом пролёт арки рассматривается как пролёт балки с длиной пролёта, равной расстоянию между пятовыми шарнирами А и В.

Линия влияния горизонтальной (распора H) составляющей опорной реакции может быть построена в соответствии с выражением (3.4), согласно которому

$$Л.в.Н = \frac{Л.в.М_c^0}{f} \quad . \quad (3.8)$$

Из (3.8) видно, что линия влияния распора имеет в точности такой же вид, что и линия влияния изгибающего момента для сечения С, построенной из рассмотрения пролёта арки как пролёта простой двухопорной балки (см. рис. 3.5). В соответствии с этим все ординаты данной линии влияния поделены на постоянную f , равную стреле подъёма арки.

Линия влияния изгибающего момента M_k^a в произвольном сечении к арки, находящемся на расстоянии x от левой опоры, может быть построена исходя из формулы (3.5):

$$Л.в.М_k^a = Л.в.М_k^0 - Л.в.Н \cdot y_k \quad . \quad (3.9)$$

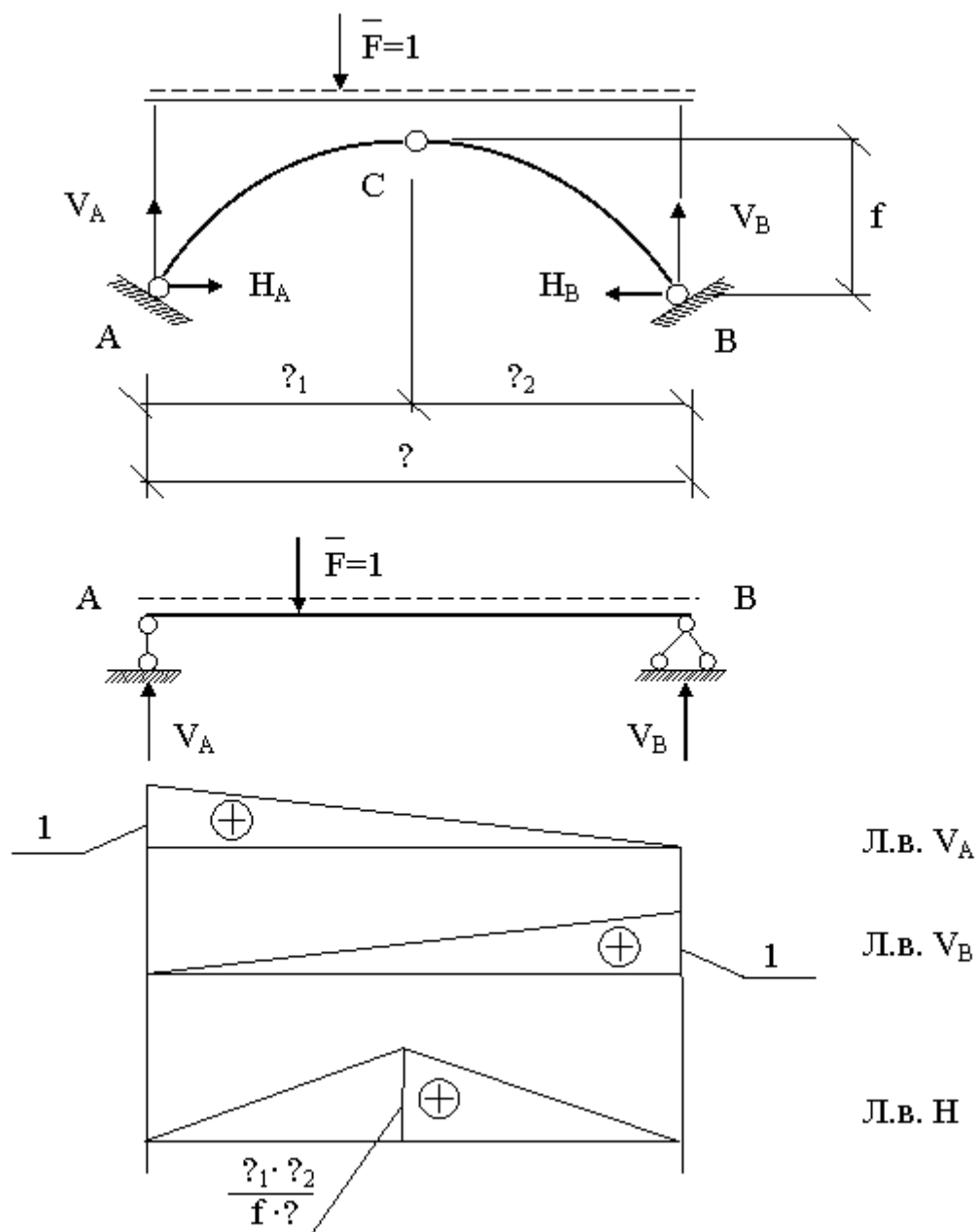
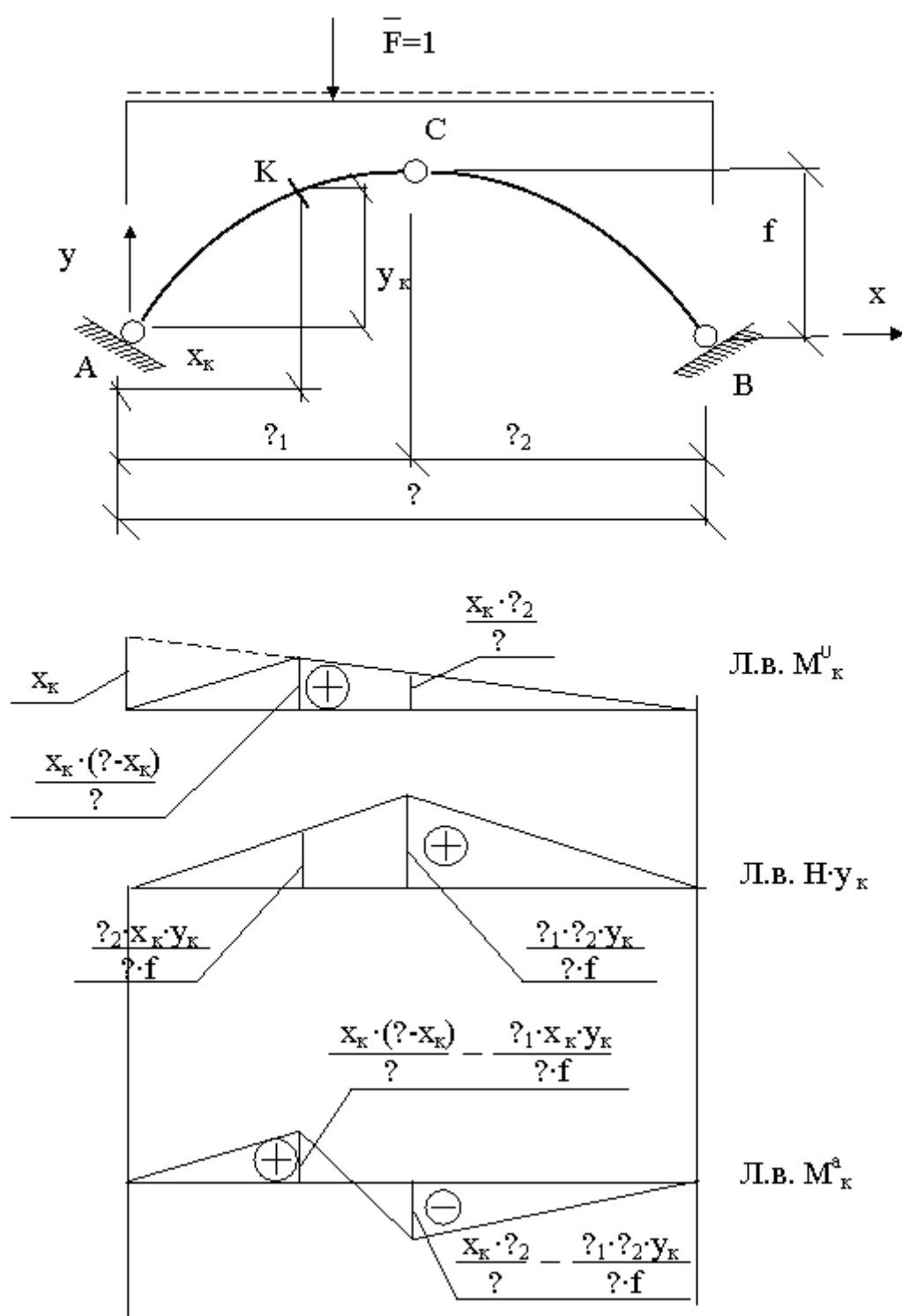


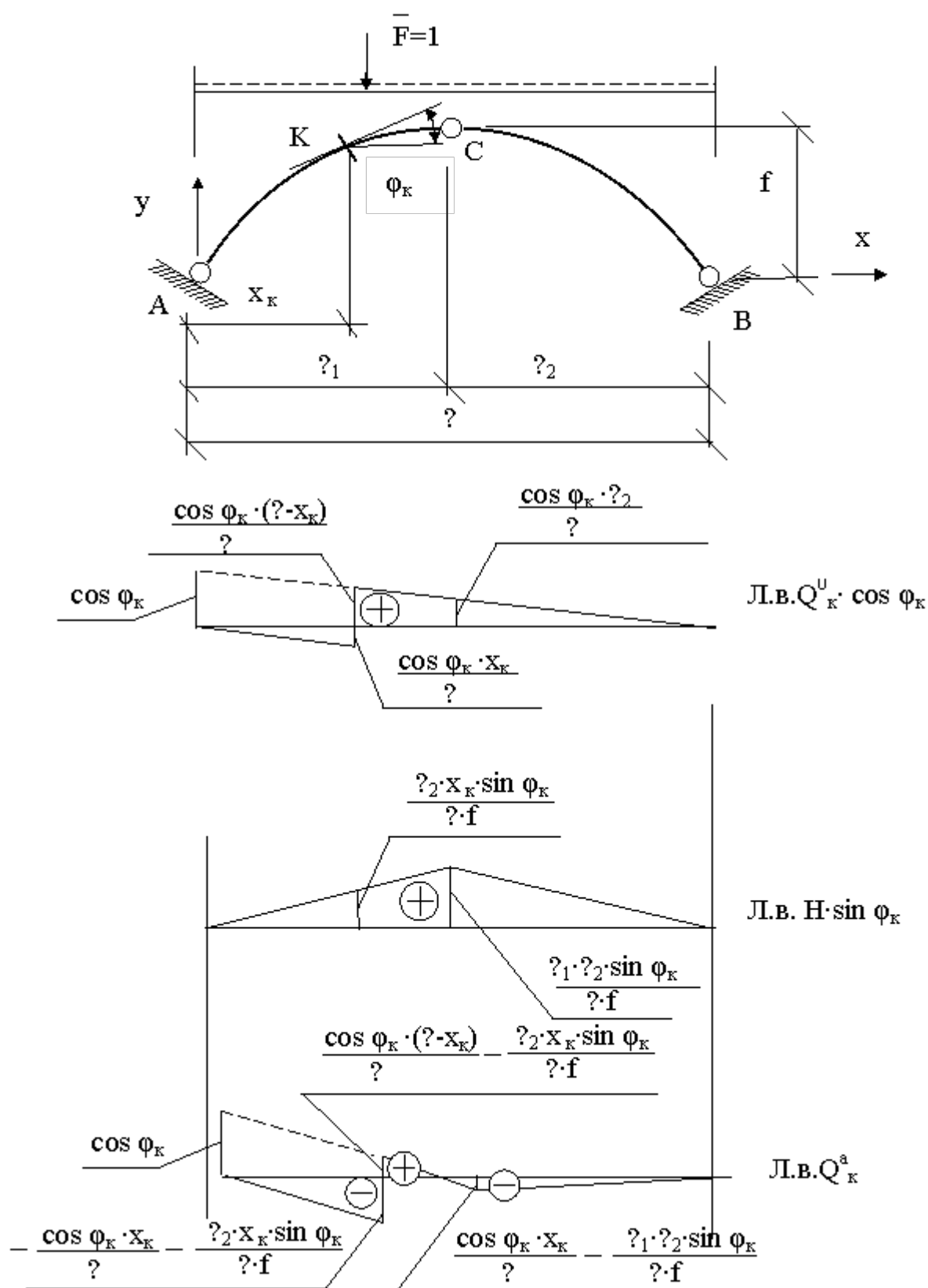
Рис. 3.6

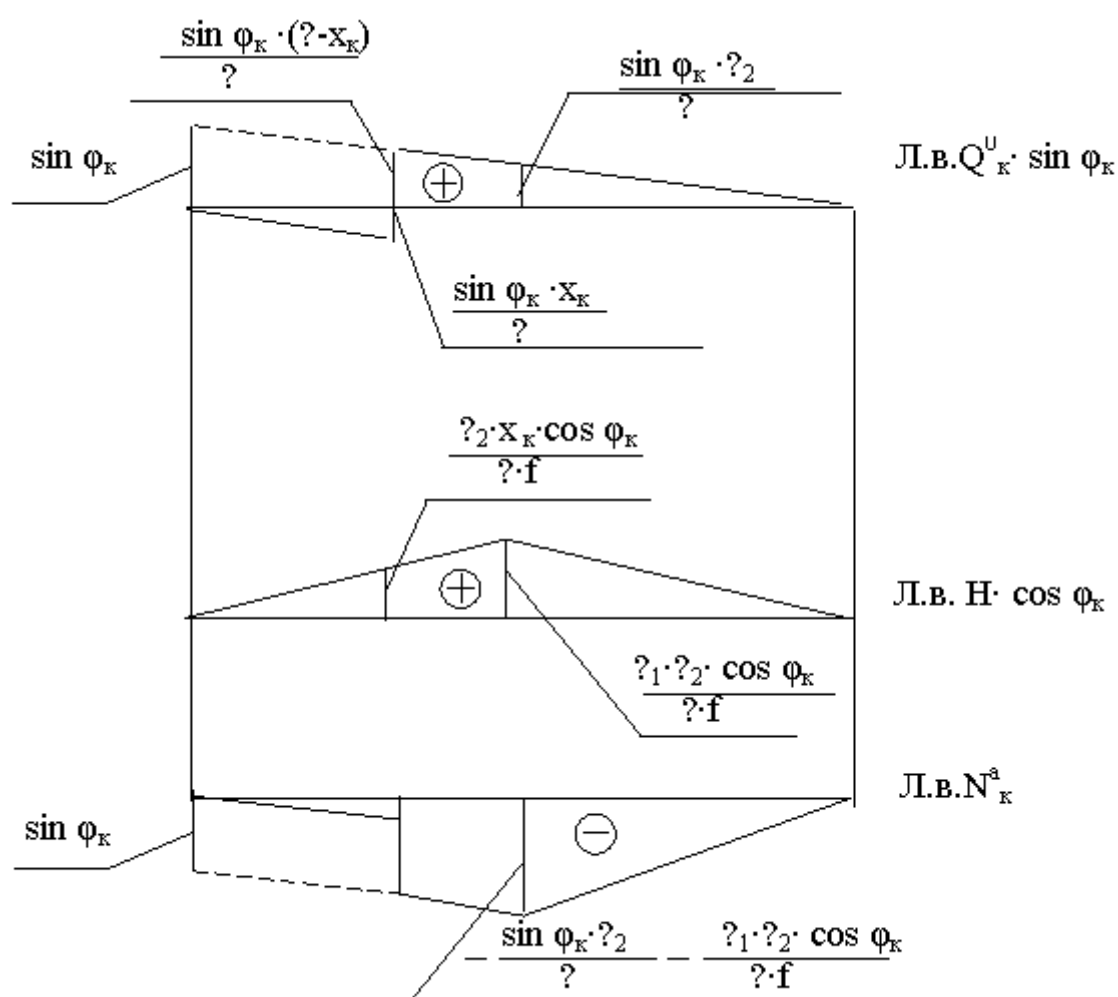
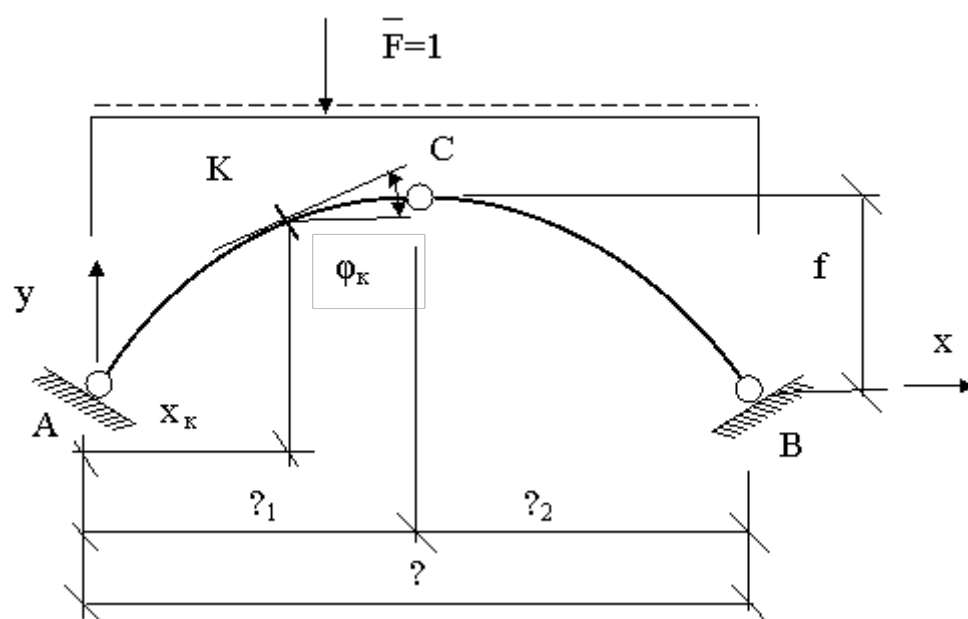
В соответствии с этим выражением л.в. M_k^a представляет собой алгебраическую сумму двух линий влияния – линии влияния балочного момента и линии влияния распора H , ординаты которой умножают на постоянную величину ук. На рис. 3.7 показано построение M_k^a путём геометрического сложения указанных линий влияния.

Построение линии влияния поперечной силы Q основывается на формуле (3.6) и соответствует выражению

$$Л.в. Q_k^a = Л.в. Q_k^0 \cdot \cos \varphi_k - Л.в. H \cdot \sin \varphi_k. \quad (3.10)$$







Согласно (3.10) л.в. Q_k^a представляет собой геометрическую сумму двух линий влияния – балочной линии влияния, построенной для сечения к из рассмотрения пролёта арки как пролёта балки, и линии влияния распора, умноженных соответственно на значения $\cos \varphi_k$ и $\sin \varphi_k$, имеющих место в сечении к. На рис. 3.8 показано построение л.в.

Построение линии влияния продольной силы N_k^a , согласно формуле (3.7), можно осуществить по выражению

$$Л.в. N_k^a = -[Л.в. Q_k^0 \cdot \sin \varphi_k + Л.в. H \cdot \cos \varphi_k]. \quad (3.11)$$

На рис. 3.9 показано построение этой линии влияния. Анализ всех трёх линий влияния показывает, что на каждой из них есть такая точка, при положении над которой подвижной силы $F=1$ искомое усилие равно нулю. Эта точка называется нулевой и может быть использована для геометрического построения указанных линий влияния.

Известно, что при расположении нагрузки только над одной из двух полуарок (например, левой) вектор наклонной опорной реакции в другой (например, правой) будет проходить через пятовый В и замковый С шарниры.

При построении линии влияния изгибающего момента M_k^a

(рис. 3.10) методом нулевой точки (сечение к расположено на левой полуарке) вектор опорной реакции R_B проводят через шарниры В и С, а вектор опорной реакции R_A – через пятовый шарнир А и сечение к. Из рассмотрения

равновесия левой от сечения к части арки очевидно, что $M_k^a = 0$ в случае прохождения вектора опорной реакции R_A через сечение к. Точка D пересечения векторов R_A и R_B является той точкой, при положении над

которой подвижной силы $\bar{F} = 1$ изгибающий момент $M_k^a = 0$. Для определения аналитически точных значений ординат линии влияния

изгибающего момента M_k^a из подобия треугольников DOB~CPB и DOA~kEA находят расстояние

$$x_M = \frac{f \ell}{\ell_2 \left(\frac{y_k}{x_k} + \frac{f}{\ell_2} \right)}. \quad (3.12)$$

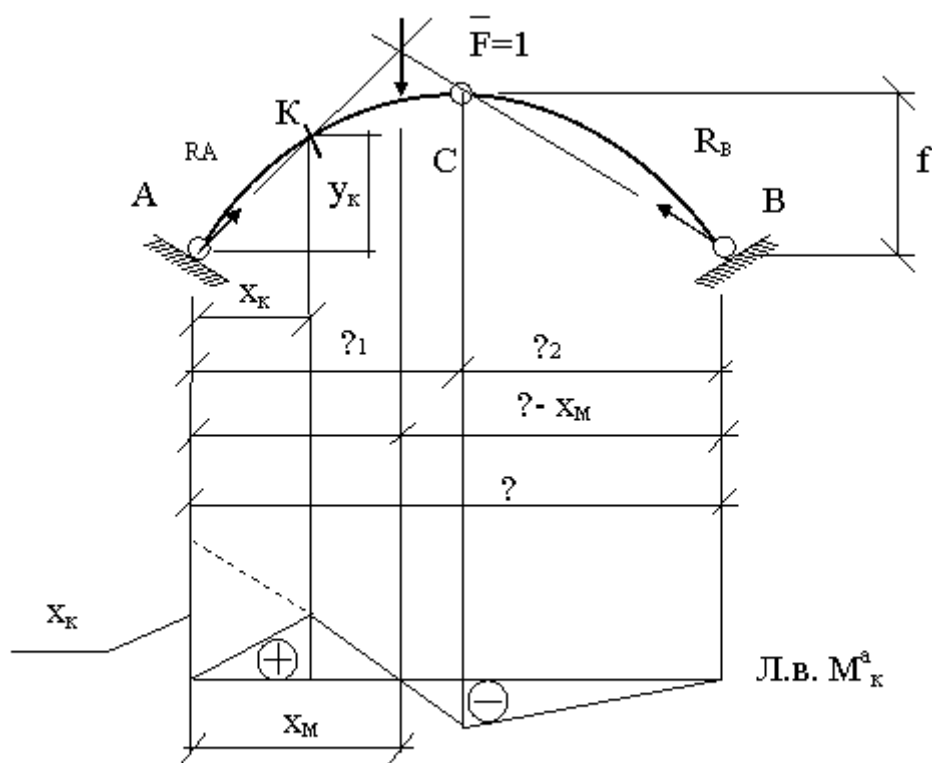


Рис. 3.10

Построение линии влияния поперечной силы Q_k^a методом нулевой точки показано на рис. 3.11. Для того чтобы поперечная сила в сечении k $Q_k^a = 0$, вектор опорной реакции R_A должен проходить параллельно касательной, проведенной к очертанию оси арки в точке k . Формула для определения расстояния x_Q , полученная по тому же принципу, что и в предыдущем случае, имеет вид

$$x_Q = \ell \operatorname{tg} \alpha / (\operatorname{tg} \varphi_k + \operatorname{tg} \alpha). \quad (3.13)$$

$$= \frac{f}{\ell_2}.$$

В рассмотренном примере $\operatorname{tg} \alpha$

Расстояние x_N (см. рис. 3.11) можно определить по по формуле

$$x_N = \ell \operatorname{tg} \alpha / (\operatorname{ctg} \varphi_k - \operatorname{tg} \alpha). \quad (3.14)$$

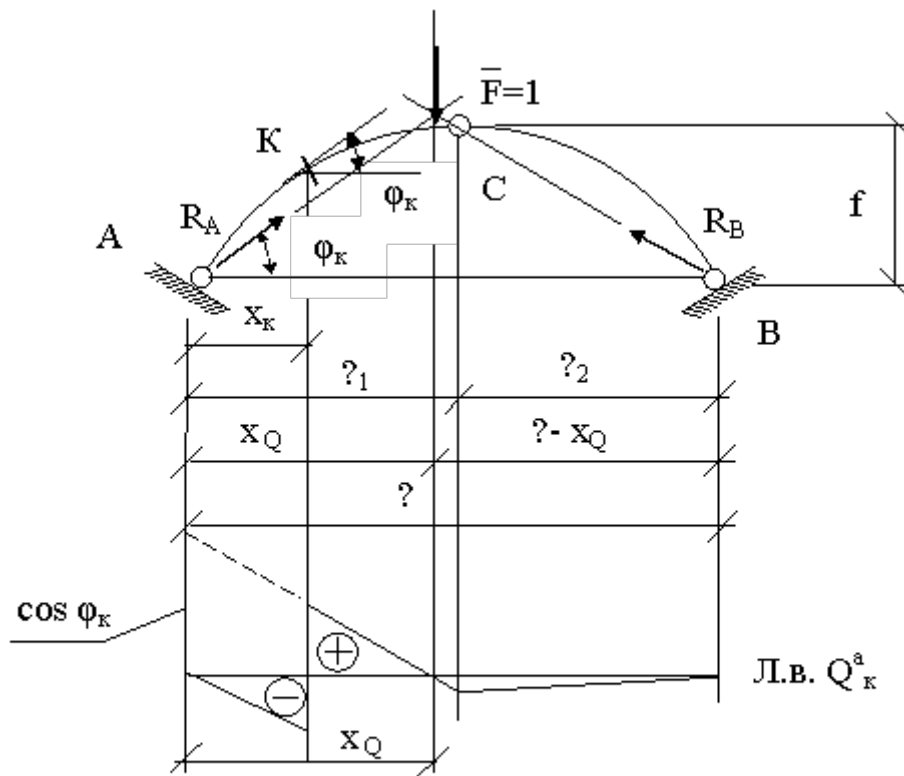


Рис. 3.11

В случае расположения сечения k на правой полуарке формулы (3.12), (3.13) и (3.14) можно использовать с учётом того, что эти расстояния необходимо отмерять от правой пятовой опоры B .

Рассмотрим два частных случая построения л.в. Q_k^a , показанные на рис. 3.13 и 3.14. Если сечение, например $k1$, расположено на левой полуарке ближе к замковому шарниру C , то направление вектора опорной реакции R_A пересечёт направление опорной реакции R_B в точке (нулевой точке), расположенной над правой полуаркой (см. рис. 3.13). Но между двумя шарнирами (в данном случае C и B) усилие должно изменяться по закону прямой линии. Если сечение, например $k2$, расположено на левой полуарке таким образом, что направления опорных реакций R_A и R_B пересекутся в шарнире C , то правая прямая (см. рис. 3.14) будет совпадать с базовой линией.

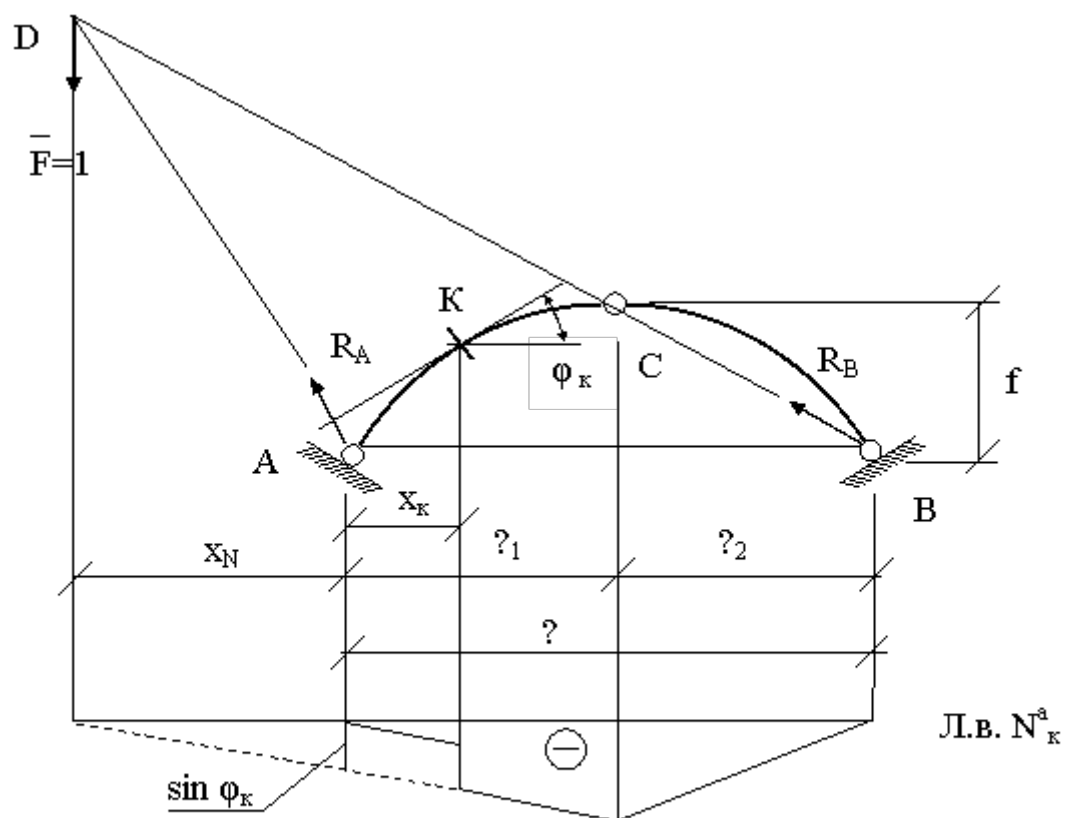


Рис. 3.12

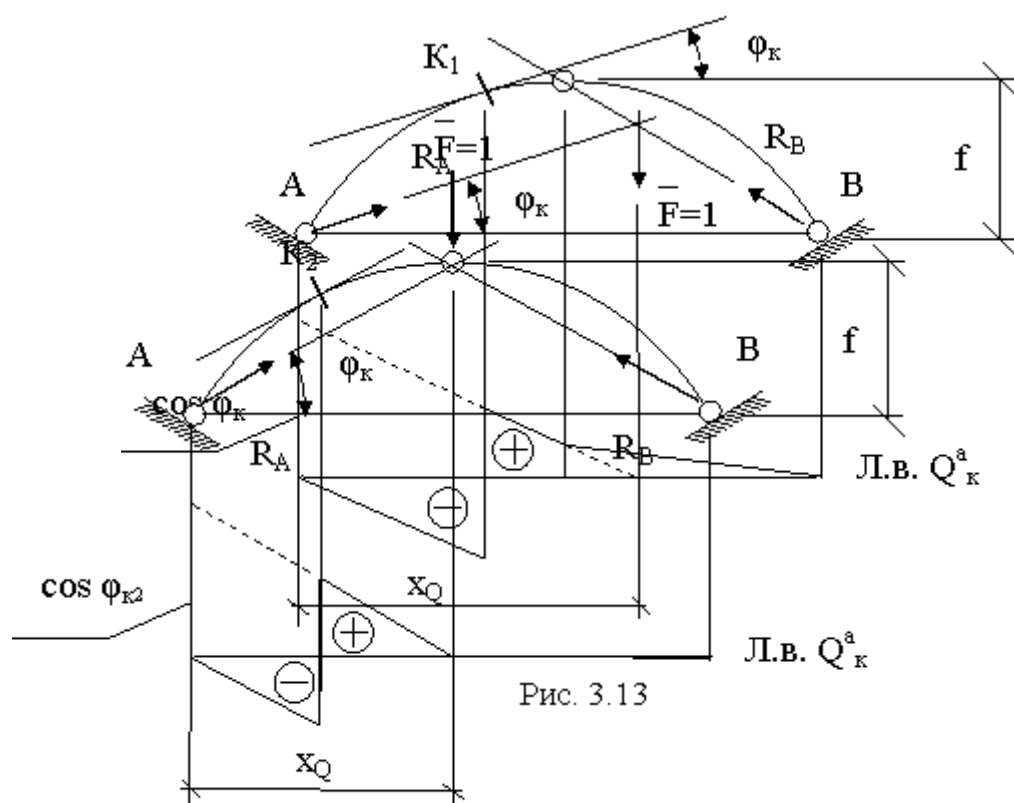


Рис. 3.13

Рис. 3.14

ПЛОСКИЕ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ БАЛОЧНЫЕ ФЕРМЫ

Понятие о ферме

Реальные фермы являются многократно статически неопределимыми системами, так как стержни в узлах соединены между собой жестко. Точный расчет таких ферм требует выполнения объемных вычислений. Однако, как показывают сравнительные расчеты, при действии на стальные фермы узловой нагрузки усилия в стержнях ферм с жесткими узлами мало отличаются от усилий в ферме с шарнирным соединением стержней в узлах. Это позволяет определять усилия в стержнях ферм способом вырезания узлов и методом сечений.

Фермы имеют такое же назначение, как и балки сплошного сечения, только для больших пролетов, и различаются по следующим признакам: 1) характеру очертания внешнего контура; 2) типу решетки; 3) типу опорных связей фермы; 4) назначению; 5) уровню езды.

По характеру очертания внешнего контура различают фермы с параллельными поясами (рис.4.1) и с полигональным очертанием поясов (рис. 4.3).

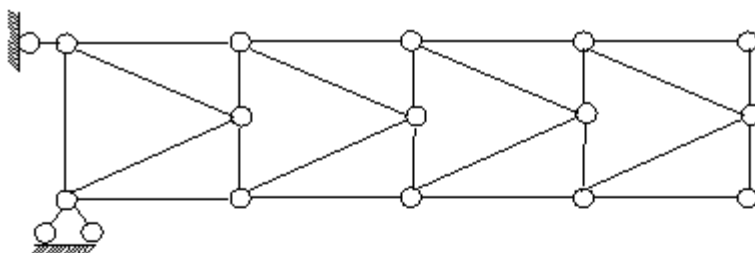


Рис. 4.1

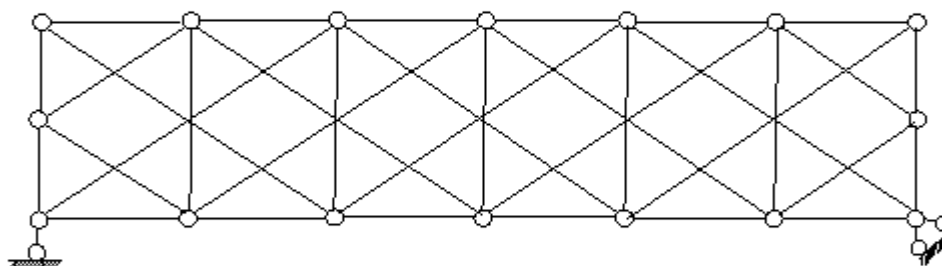


Рис. 4.2

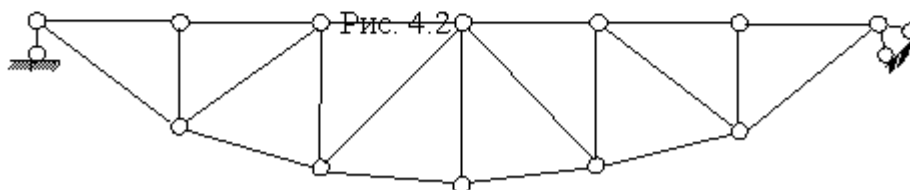


Рис. 4.3

По типу решетки различают фермы с треугольной решеткой (рис. 4.7), с раскосной решеткой (рис. 4.4), с полураскосной решеткой (см. рис. 4.1) и многорешетчатые (рис. 4.2).

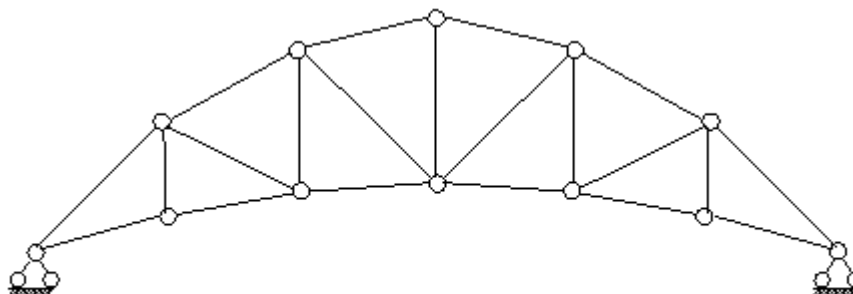


Рис. 4.4

По типу опорных связей различают фермы: балочные (рис. 4.3), арочные (см. рис. 4.4) и консольные (см. рис. 4.1).

По конструктивному назначению различают фермы стропильные, крановые, мостовые и др.

Мостовые фермы по уровню езды делятся на фермы с ездой поверху, с ездой понизу и с ездой посередине.

Линии влияния усилий в стержнях ферм

При построении линий влияния усилий в стержнях ферм рассматривают два положения единичной силы $\bar{F} = 1$ слева и справа от рассечённой панели ездового полотна. Сила $\bar{F} = 1$ может перемещаться по так называемому ездовому полотну, отмеченному на рисунках данного раздела пунктирной линией. Как правило, ездовым полотном бывает либо верхний пояс, либо нижний.

Так как ферма является конструкцией с узловой передачей нагрузки, линии влияния усилий в стержнях будут иметь вид ломаной линии с вершинами под узлами. Если для определения усилия используется способ вырезания узлов, то рассматривается статическое равновесие узла, например узла 5 (рис. 4.5), для двух положений единичной безразмерной силы : в узле и вне узла фермы.

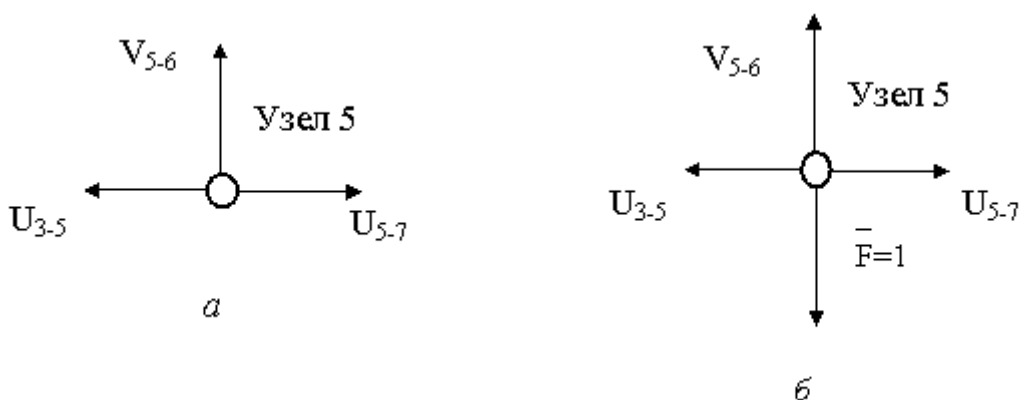
В случае определения усилий методом сечений линия влияния состоит из трех отрезков прямых: левой прямой, правой прямой и соединительной прямой. Левая прямая соответствует положению

слева от рассекаемой панели, а правая прямая справа от рассекаемой панели ездового полотна. Переходная прямая соединяет ординаты под узлами рассекаемой панели ездового полотна.

Рассмотрим построение линий влияния усилий в вертикальных элементах для фермы на рис. 4.6.

Для того чтобы построить линию влияния усилия V_{5-6} , при езде понизу необходимо вырезать узел 5 и рассмотреть его равновесие для двух положений подвижной силы :

- 1) сила находится в любом узле, кроме узла 5 (левее узла 3 или правее узла 7) (см. рис 4.5,а). Тогда $\sum Y = -V_{5-6} = 0 \Rightarrow V_{5-6} = 0$.
- 2) сила находится непосредственно в узле 5, что соответствует езде понизу (см. рис 4.5,б). Тогда $\sum Y = \bar{F} - V_{5-6} = 0 \Rightarrow V_{5-6} = 1$.



Линия влияния усилия V_{5-6} для езды понизу приведёна на рис. 4.6,б.

При езде поверху сила не может действовать на узел 5 (см. рис 4.5,а), поэтому $V_{5-6} = 0$.

Линия влияния усилия V_{5-6} для езды поверху приведена на рис. 4.6,в.

Для построения линии влияния усилия V_{3-4} при езде понизу необходимо мысленно рассечь ферму наклонным сечением в панелях 1 – 3 и 4– 6 (см. рис 4.5,а) и рассмотреть равновесие левой отсеченной части (при этом подвижную

нагрузку сначала оставляем в правой отброшенной части фермы).

$$\sum Y = RA - V_{3-5} = 0 \Rightarrow V_{3-5} = RA - \text{правая прямая.}$$

Таким образом, получена правая прямая, которая справедлива до тех пор, пока единичная сила находится правее узла 3 (езда понизу). Точка Риттера (моментная точка) лежит в бесконечности, потому что векторы двух других неизвестных усилий, попавших в сечение (U1-3 и O4-6), параллельны и пересекаются в бесконечности. В связи с этим левая прямая должна пройти через ноль на левой опоре и быть параллельна правой прямой. Левая прямая справедлива до тех пор, пока подвижная сила располагается левее узла 1. Переходная прямая соединяет ординаты линии влияния под узлами 1 и 3 рассечённой панели 1 – 3 ездового полотна.

Линия влияния усилия V_{3-4} для езды понизу приведена на

рис. 4.6, г.

Переходная прямая при езде поверху соединяет ординаты линии влияния под узлами 4 и 6 рассечённой панели 4 – 6 ездового полотна.

Линия влияния усилия V_{3-4} для езды понизу приведена на

рис. 4.6, д.

Построение линий влияния усилий в элементах поясов фермы рассмотрим на примере фермы, представленной на рис. 4.7.

Для определения усилия U_{3-5} нижнего пояса необходимо рассечь ферму в панелях 3 – 5 и 4 – 6 и рассмотреть равновесие левой отсеченной части (рис. 4.7, а) (при этом подвижную силу, как и в предыдущем случае, оставляем в правой отброшенной части фермы). Составим уравнение моментов относительно моментной точки 4:

$$\sum M_{лев4} = RA \cdot 1,5 - U_{3-5} \cdot h = 0 \Rightarrow U_{3-5} = \frac{1,5d}{h} RA - \text{правая прямая.}$$

Полученная правая прямая справедлива до тех пор, пока подвижная сила находится правее узла 5.

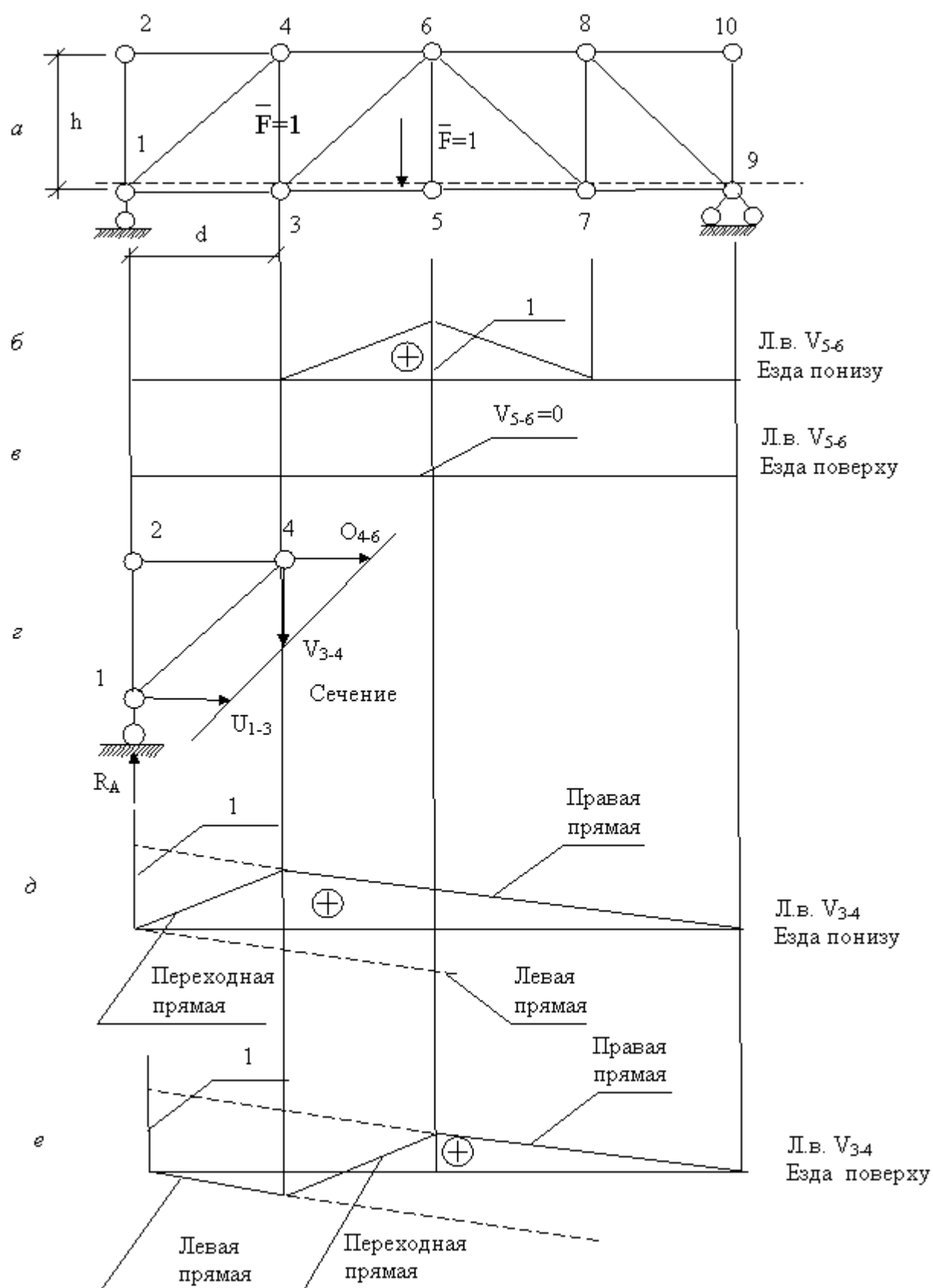


Рис. 4.6

Для построения левой прямой при положении подвижной силы $\bar{F} = 1$ правее сечения снова составим уравнение моментов относительно моментной точки 4, рассматривая равновесие правой отсечённой части (рис 4.7, в):

$$\Sigma M_{пр4} = -R_B \cdot 2d + U_{3-5} \cdot h = 0 \Rightarrow U_{3-5} = \frac{1,5d}{h} R_B. \text{ — левая прямая.}$$

Аналогично строится линия влияния усилия О4-6 верхнего пояса. Моментной точкой для данного стержня является узел 5.

Усилие в раскосе D2-5 для фермы, представленной на рис. 4.8, можно определить, также мысленно рассекая сечением ферму через панели 2 – 4 и 3 – 5. Моментной точкой для данного стержня является точка к. Из уравнения моментов относительно этой точки определим положение правой прямой линии влияния D2-5.

$$\Sigma M_k = D_{2-5} \cdot r_{2-5} - R_A \cdot c = 0 \Rightarrow D_{2-5} = R_A \cdot c / r_{2-5} \text{ — правая прямая.}$$

Положение левой прямой линии влияния D2-5 можно найти из того, что левая и правая прямые должны обязательно пересекаться под моментной точкой. В данном случае – это точка к, что показано на рис. 4.8. Спроецируем эту точку на правую прямую – точку о. Соединим её с точкой, находящейся на базовой линии под левой опорой (точка 1) рассматриваемой фермы. Таким образом получено положение левой прямой линии влияния D2-5. Переходная прямая соединяет ординаты левой прямой линии влияния D2-5 под узлами 3 и 5 рассекаемой панели 3 – 5 ездового полотна.

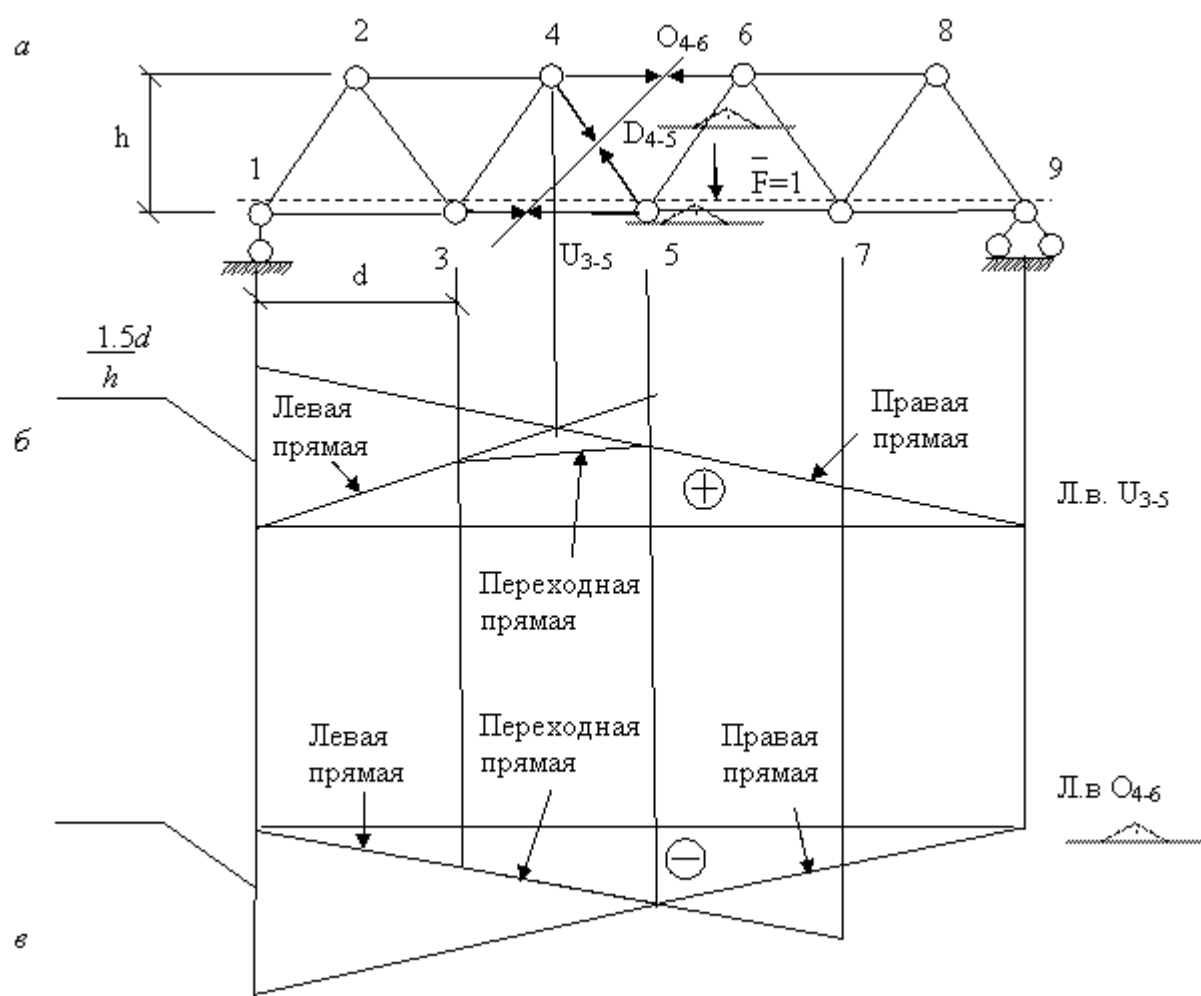


Рис. 4.7

$$-\frac{2d}{h}$$

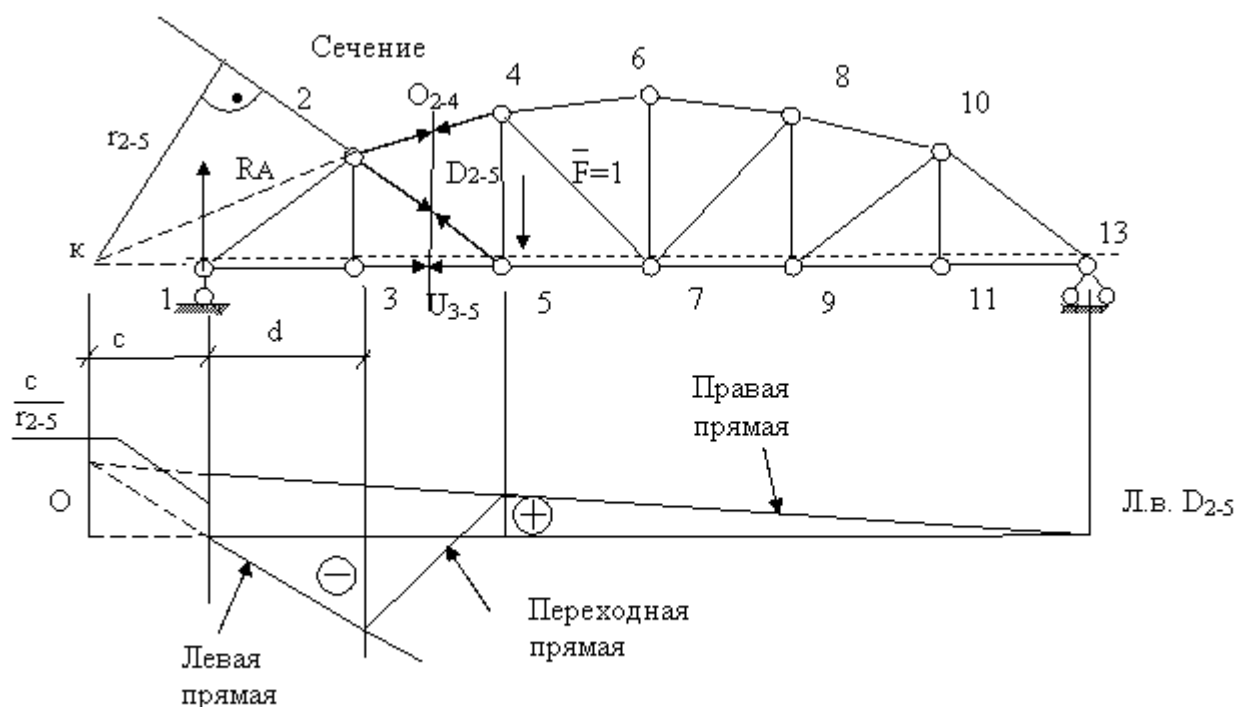


Рис. 4.8

Загружение линий влияния усилий в стержнях ферм

Загружение линий влияния усилий в стержнях ферм в принципе ничем не отличается от загружений линий влияния других усилий и осуществляется в

$$S_i = \sum_{i=1}^n F_i \cdot y_i$$

соответствии с выражением . Однако для некоторых стержней линии влияния усилий будут иметь различный вид в зависимости от расположения ездового полотна для езды поверху и езды понизу (см. рис. 4.6). В связи с этим величина усилия в стержне будут зависеть от того, к узлам какого пояса, верхнего или нижнего, приложена нагрузка и где расположено ездовое полотно.

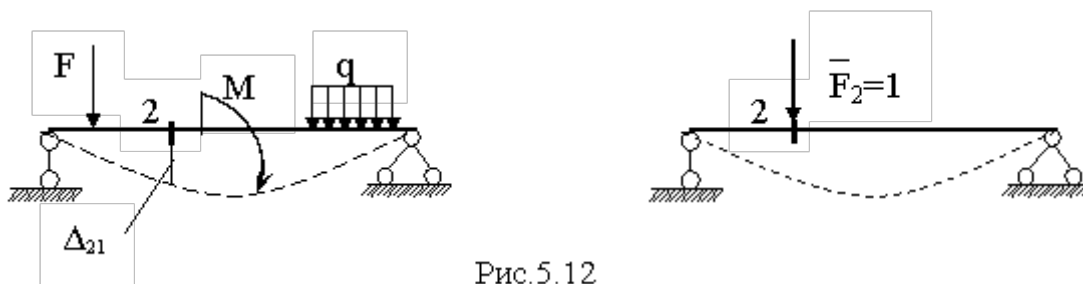
Например, чтобы вычислить усилие в стержне V3-4 для силы F_v , действующей на узел 4, необходимо её величину умножить на ординату y_v линии влияния, соответствующей для езды поверху (см. рис. 4.6, е). Для определения усилия от F_n , приложенной в узле 3 нижнего пояса, величина V3-4 определяется путём умножения F_n на y_n линии влияния, соответствующей для езды понизу (см. рис. 4.6, д).

Определение перемещений.

Интеграл Мора

Рассмотрим теперь два состояния системы, показанные на рис. 5.12. В первом из них на систему действует произвольный комплекс внешних нагрузок, во втором – только единичный силовой фактор – сила $\bar{F}_k = 1$.

Состояние m Состояние k



Составим выражение возможной работы, совершаемой заданным комплексом внешних и внутренних сил состояния k на перемещениях состояния m. Согласно принципу возможных перемещений, должно удовлетворяться равенство

$$W_{km} + \bar{F}_k \cdot \Delta_{km} = 0. \quad (5.23)$$

При этом возможная работа внутренних сил состояния k на перемещениях состояния m

$$W_{km} = -\sum_s \int \bar{N}_k \frac{N_m d\ell}{EA} - \sum_s \int \bar{M}_k \frac{M_m d\ell}{EJ} - \sum_s \int \eta \bar{Q}_k \frac{Q_m d\ell}{GA}. \quad (5.24)$$

Возможная работа внешних сил состояния k на перемещениях состояния m будет равна

$$\bar{F}_k \cdot \Delta_{km} = 1 \cdot \Delta_{km}. \quad (5.25)$$

Подставляя в выражение (5.23) выражения (5.24) и (5.25), после арифметических преобразований получим

$$\Delta_{km} = \sum_s \int \bar{N}_k \frac{N_m ds}{EA} + \sum_s \int \bar{M}_k \frac{M_m ds}{EJ} + \sum_s \int \eta \bar{Q}_k \frac{Q_m ds}{GA}. \quad (5.26)$$

Черта над обозначениями усилий означает, что эти усилия найдены от действия единичного силового фактора. Таким образом, перемещения от любой нагрузки можно выразить через внутренние усилия, возникающие в этой системе от действия на неё заданной внешней нагрузки и от действия на неё единичного силового фактора. При этом направление единичного силового фактора совпадает с направлением искомого перемещения.

Если определяется линейное перемещение (рис. 5.13), то в единичном (дополнительном) состоянии к системе, в той точке, перемещение которой определяется, прикладывается сила $\bar{F} = 1$. Если определяется угловое перемещение (рис. 5.14), то к тому сечению, угол поворота которого определяется, прикладывают сосредоточенный момент $\bar{M} = 1$.

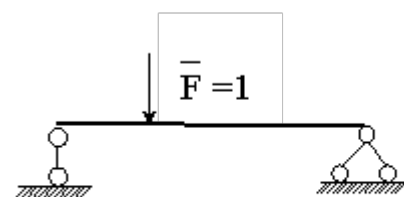


Рис. 5.13

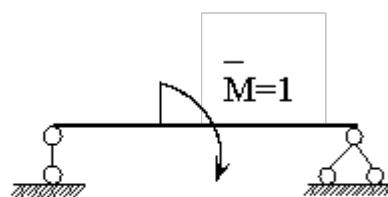


Рис. 5.14

Если определяют взаимное линейное смещение (рис. 5.15) двух точек системы, то в единичном состоянии к этим точкам по линии искомого смещения прикладывают единичные сосредоточенные силы, вектор которых направлен в разные стороны.

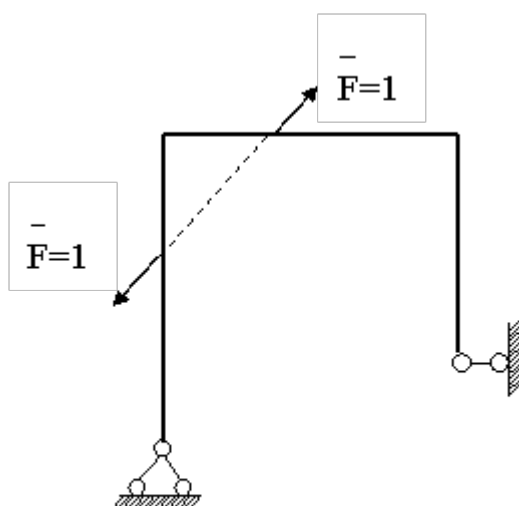


Рис. 5.15

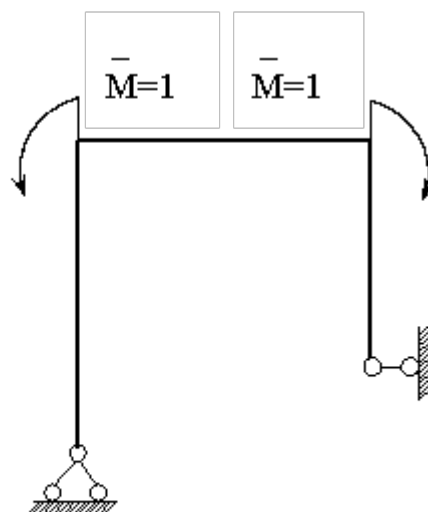


Рис. 5.16

Если определяют взаимное угловое перемещение двух сечений, то в единичном состоянии к этим двум сечениям (рис. 5.16) прикладывают сосредоточенные единичные моменты, вектор которых направлен в сторону возможного взаимного углового перемещения.

В общем виде формула для определения перемещений принимает вид выражения (5.26), называемого интегралом Мора.

Порядок определения перемещений:

- находят аналитические выражения для определения внутренних усилий при действии на систему заданной внешней нагрузки (действительное состояние системы – состояние m);
- по направлению искомого перемещения прикладывают соответствующий искомому перемещению единичный силовой фактор, от действия которого находят аналитическое выражение внутреннего силового фактора (единичное состояние системы – состояние k);
- полученные аналитические выражения внутренних силовых факторов подставляют под знаки интегралов и осуществляют интегрирование, результатом которого является определение величины искомого перемещения.

При этом следует отметить, что если знак найденного перемещения окажется отрицательным, то это означает, что действительное направление искомого перемещения направлено в противоположную сторону действия единичного силового фактора.

Правило П. Верещагина

На практике часто встречаются случаи, когда на отдельных участках стержни имеют одинаковые физические и геометрические параметры, а одна из подынтегральных функций изменяется линейно. Тогда при учёте только, например, изгибающего момента соответствующее слагаемое интеграла Мора принимает следующий вид:

$$\Delta_{km} = \frac{1}{EJ} \int_s \bar{M}_k \cdot M_m \cdot ds. \quad (5.27)$$

Подынтегральные функции представляют собой функции, по которым строят соответствующие эпюры (рис. 5.17).

Принимая $EJ = 1$ и переходя к интегрированию по координате x, получим

$$\Delta_{km} = \int_a^b \bar{M}_k \cdot M_m \cdot dx \quad (5.28)$$

На рис. 5.16 эюра \bar{M}_k представляет собой эюру, построенную от того или иного силового фактора, равного единице (единичная эюра), а эюра M_m представляет собой эюру, построенную от действия заданной внешней нагрузки. Такую эюру называют грузовой эюрой.

Из рис. 5.17 очевидно, что $\bar{M}_k = (x + a) \operatorname{tg} \alpha$. Подставив это выражение под знак интеграла (5.28), получим

$$\Delta_{km} = \int_c^b (x + a) \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot M_m \cdot dx = \operatorname{tg} \alpha \int_{\Omega} (x + a) \cdot d\Omega \quad (5.29)$$

В выражении (5.27) $d\Omega = M_m \cdot dx$ – дифференциал площади эюры M_m

; $\int_{\Omega} (x + a) d\Omega$ – статический момент площади эюры M_m (площади Ω)

относительно оси $O - O'$. Этот статический момент можно записать

как $S_m = (x_c + a) \Omega$, где $(x_c + a)$ – расстояние от центра тяжести эюры M_m до оси $O - O'$. Таким образом, выражение (5.29) можно переписать

$$\Delta_{km} = \int_c^b \bar{M}_k \cdot M_m \cdot dx = (x_c + a) \cdot \Omega \operatorname{tg} \alpha.$$

Произведение в правой части $(x_c + a) \cdot \operatorname{tg} \alpha = y_c$.

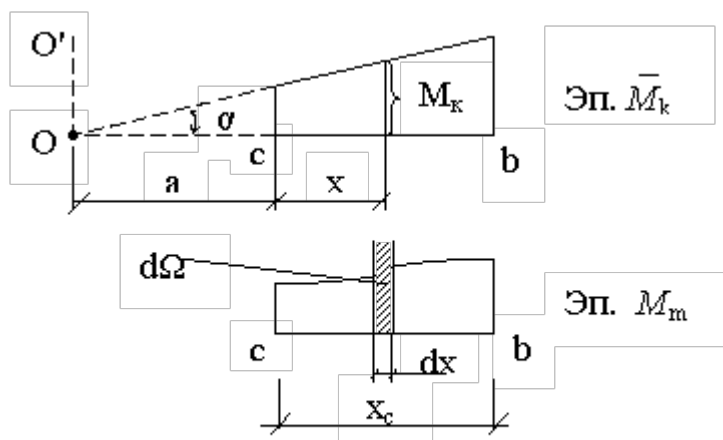


Рис. 5.17

В выражении (5.27) $d\Omega = M_m \cdot dx$ – дифференциал площади пюры M_m $\int (x+a)d$; Ω – статический момент площади эпюры M_m (площади Ω) относительно оси $O-O'$. Этот статический момент можно записать как $S_m = (x_c + a)\Omega$, где $(x_c + a)$ – расстояние от центра тяжести эпюры M_m до оси $O-O'$. Таким образом, выражение (5.29) можно

$$\Delta_{km} = \int_c^b \bar{M}_k \cdot M_m \cdot dx = (x_c + a) \cdot$$

переписать так:

$\Omega \operatorname{tg} \alpha$. Произведение в правой части $-(x_c + a) \cdot \operatorname{tg} \alpha = \text{ус}$. На основании изложенного

$$\Delta_{km} = \int_a^b \bar{M}_k \cdot M_m \cdot dx = \Omega \cdot \text{ус.} \quad (5.30)$$

Окончательно можно записать следующее равенство:

$$\Delta_{km} = \frac{1}{EJ} \int_s \bar{M}_k \cdot M_m \cdot ds = \frac{\Omega \cdot y_c}{EJ} = \frac{\partial \bar{M}_k \cdot \partial M_m}{EJ}. \quad (5.31)$$

Таким образом, доказана возможность интегрирования методом перемножения эпюр. Перемножить две эпюры – найти площадь одной из них и умножить на ординату, снятую на другой и находящуюся под центром тяжести первой. Знак произведения считается положительным, если обе перемножаемые эпюры находятся по одну сторону стержня. Следует помнить, что если перемножаются две прямолинейные эпюры, то не имеет значения, на какой из них брать площадь, а на какой – ординату. Если одна из перемножаемых эпюр является криволинейной, то необходимо брать площадь именно криволинейной эпюры. Перемножать эпюры можно только на тех участках, на которых обе эпюры являются неломаными и жёсткостные характеристики поперечных сечений являются постоянными. В противном случае перемножение эпюр необходимо осуществлять по участкам. Тогда выражение (5.31) примет вид

$$\Delta_{km} = \sum \frac{1}{EJ} \int \bar{M}_k \cdot M_m \cdot ds = \sum \frac{\partial \bar{M}_k \cdot \partial M_m}{EJ}. \quad (5.32)$$

Суммирование по выражению (5.32) должно осуществляться по всем участкам, по длине которых имеет место непрерывность подынтегральных функций \bar{M}_k и M_m .

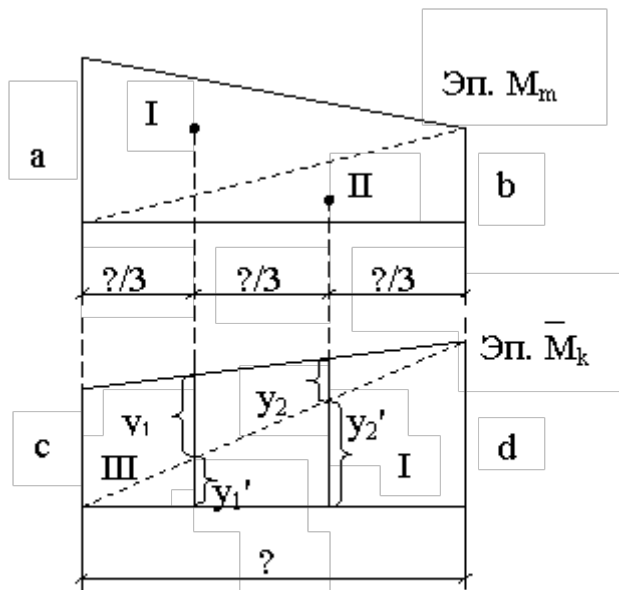


Рис. 5.18

В качестве примера (рис. 5.18) покажем перемножение двух трапеций.

$$+ \omega_2 \cdot y_2') = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{2} a \ell \left(\frac{2}{3} c \right) + \frac{1}{2} a \ell \left(\frac{1}{3} d \right) + \frac{1}{2} b \ell \left(\frac{1}{3} c \right) + \frac{1}{2} b \ell \left(\frac{2}{3} d \right) \right) =$$

$$= \frac{\ell}{6EJ} (2(ac + bd) + ad + bc)$$

Полученное выражение носит название формулы трапеции.

Определение перемещений от действия температуры

Интеграл Мора, как отмечалось в предыдущем подразделе, может быть представлен в следующем виде:

$$\Delta_{km} = \sum_s \int \bar{M}_k \cdot \Delta_\varphi + \sum_s \int \bar{N}_k \cdot \Delta_s + \sum_s \int \bar{Q}_n \cdot \Delta_y \quad (5.33)$$

$$\Delta_{\varphi} = \frac{M_m ds}{EJ}$$

В выражении (5.33) – взаимный угол поворота торцевых сечений (рис. 5.19) элемента, имеющего бесконечно малую длину ds стержня от

$$\Delta_s = \frac{N_m \cdot ds}{EA}$$

заданной внешней нагрузки; – взаимное смещение торцевых

$$\Delta_y = \eta \cdot \frac{Q_m ds}{GA}$$

сечений ds ; – взаимное смещение торцевых сечений вдоль оси, перпендикулярной оси элемента. В таком виде интеграл Мора может быть использован для определения перемещений не только от действия сил, но и от температуры.

Пусть верхнее волокно элемента ds нагрето на t_1 , а нижнее – на t_2 . При этом $t_1 > t_2$. Распределение температуры по высоте сечения принято по прямолинейному закону. При температурном коэффициенте линейного расширения α верхнее волокно удлинится на $\alpha t_1 ds$, а нижнее – на $\alpha t_2 ds$. На уровне нейтральной оси это удлинение, что очевидно из рис. 5.19, составит полусумму удлинений верхнего и нижнего волокон элемента ds .

$$\Delta_{sm} = \Delta_{st} = \frac{\alpha(t_1 + t_2)}{2} ds \quad (5.34)$$

Выражение (5.34) соответствует тому состоянию элемента ds , при котором он по всей высоте сечения h получил равномерное изменение температуры. От неравномерного нагрева торцевые сечения элемента ds поворачиваются на угол

$$\Delta_{\varphi m} = \Delta_{\varphi t} = \frac{\alpha(t_1 - t_2)}{h} ds \quad (5.35)$$

Деформация сдвига в элементе ds не возникает, т.е. $\Delta_{yn} = 0$.

Подставляя (5.34) и (5.35) в (5.33), получим интеграл Мора для определения температурных перемещений.

$$\Delta_{kt} = \sum \alpha \frac{t_1 - t_2}{h} \int_s \bar{M}_k \cdot ds + \sum \alpha \frac{t_1 + t_2}{2} \int_s \bar{N}_k \cdot ds \quad (5.36)$$

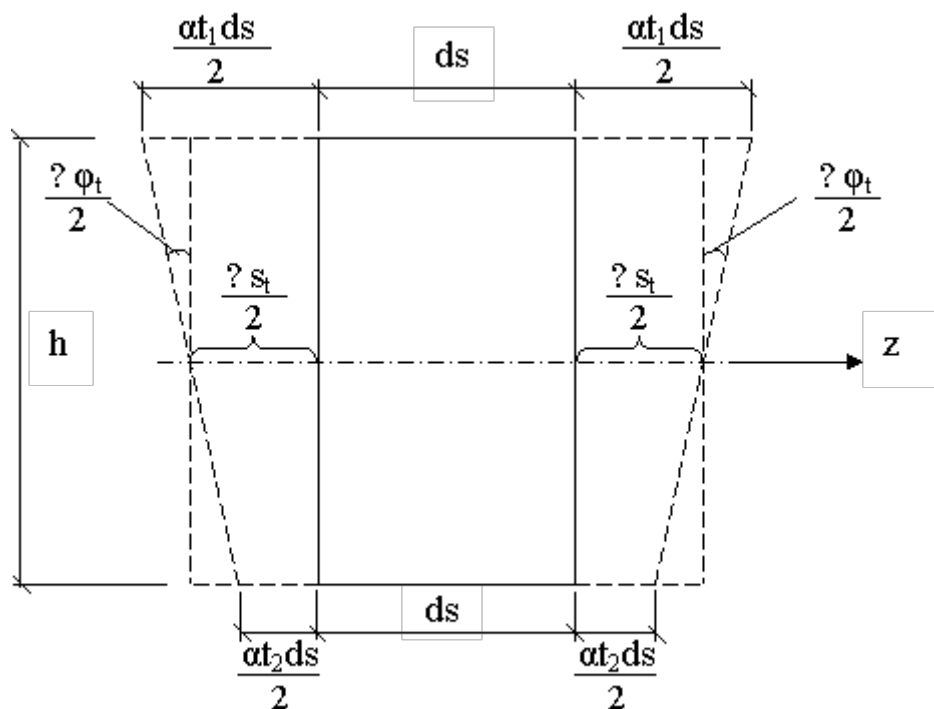


Рис. 5.19

Интеграл Мора (5.34) значительно упрощается тогда, когда интегрирование ведётся для прямолинейных или ломаных стержней, имеющих по длине постоянное поперечное сечение. В этом случае интегралы могут быть определены, как площади единичных эпюр.

$$\Delta_{kt} = \sum \alpha \frac{t_1 - t_2}{h} \Omega_{\bar{M}} + \sum \alpha \frac{t_1 + t_2}{2} \Omega_{\bar{N}}, \quad (5.37)$$

где $\Omega_{\bar{M}}$ и $\Omega_{\bar{N}}$ – площади единичных эпюр \bar{M} и \bar{N} .

При поперечном сечении элемента, несимметричном относительно нейтральной оси, в формулах (5.34) и (5.35) во втором слагаемом множитель, связанный с температурой, принимает вид $t_2 + [(t_1 - t_2)/h]y$, где y – расстояние от нижнего волокна до горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести. При этом необходимо помнить следующее правило знаков: если деформации элемента ds от температуры и от единичной силы одного знака, то соответствующие слагаемые в формулах (5.34) и (5.35) будут положительными, и соответственно наоборот.

Определение перемещений от осадки опор

При перемещениях опор любой статически определимой конструкции в её опорных закреплениях опорные реакции не возникают.

Пусть опора В рамы, представленной на рис. 5.20, получила осадку на величину Δ . При определении линейного перемещения произвольной точки, например к, в единичном состоянии к этой точке в направлении искомого перемещения прикладывают сосредоточенную силу $\bar{F} = 1$. От действия этой силы определяют опорные реакции.

На основании принципа возможных перемещений можно составить следующую аналитическую зависимость:

$$\begin{aligned}\bar{F}_k \cdot \Delta_{k\Delta} - R_b \cdot \Delta &= 0; \\ 1 \cdot \Delta_{k\Delta} - R_b \cdot \Delta &= 0; \\ \Delta_{k\Delta} &= R_b \cdot \Delta.\end{aligned}\quad (5.38)$$

Действительное состояние Единичное состояние

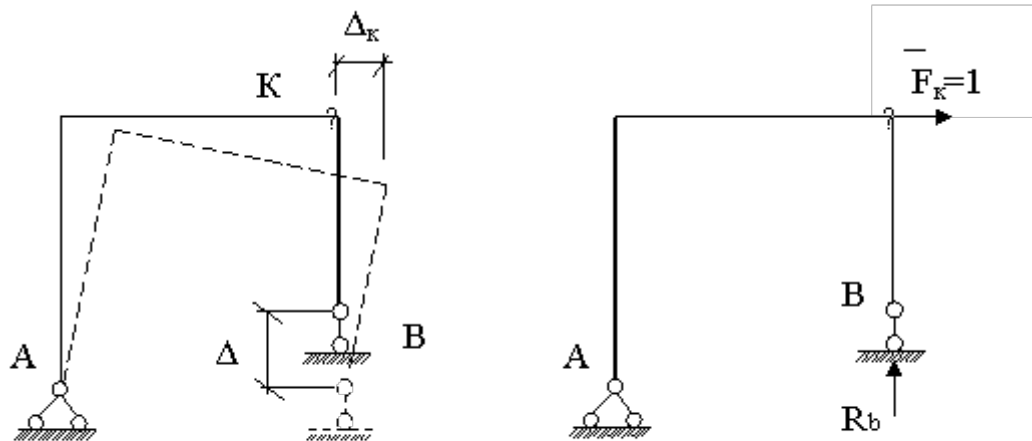


Рис. 5.20

В соответствии с третьим уравнением в (5.37) можно записать общую формулу для определения перемещений от i -й осадки опор:

$$\Delta_{k\Delta} = \sum R_i \cdot \Delta_i. \quad (5.39)$$

Произведение в (5.37) считается положительным, если опорная реакция направлена в противоположную сторону от осадки опор.

РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ

Понятие о статической неопределимости

Статически неопределимыми называются такие стержневые системы, для оценки напряжённо-деформированного состояния которых недостаточно трёх уравнений статики. Для того чтобы осуществить оценку напряжённо-деформированного состояния таких систем, необходимо составить дополнительные уравнения.

По способу составления таких уравнений (что называется раскрытием статической неопределимости) в строительной механике разработано несколько методов. Одним из первых таких методов был разработан метод сил.

Статически неопределимые системы имеют так называемые «лишние» связи. «Лишними» могут быть как внешние, так и внутренние связи. Поэтому различают как внешнюю, так и внутреннюю статическую неопределимость.

Число лишних связей определяет степень статической неопределимости системы:

$$n = 3K - Ш, \quad (6.1)$$

где K – количество замкнутых контуров системы; $Ш$ – число однократных шарниров.

Замкнутым считается такой контур, который полностью ограничен стержнями рамы или стержнями и землёй. Цифра 3 означает, что замкнутый контур является трижды статически неопределимой системой.

Выражение (6.1) является частным случаем выражения (1.1) и предназначено для определения статической неопределимости плоских рам. Если после определения степени статической неопределимости $n < 0$, это означает, что рассматриваемая стержневая система не обладает необходимым минимумом связей и поэтому не может быть использована в качестве сооружения. В случае $n = 0$ система обладает необходимым минимумом связей, является статически определимой и при правильном расположении этих связей, не допускающих любой геометрической изменяемости системы, может быть использована в качестве сооружения. В случае $n > 0$ рассматриваемая стержневая система обладает «лишними» связями и поэтому является статически неопределимой и может быть использована в качестве сооружения. Так, для рамы, показанной на рис 6.1, $K = 2$; $Ш = 4$.

Подставляя эти данные в выражение (6.1), получим

$$n = 3 \cdot 2 - 4 = 2. \quad (6.2)$$

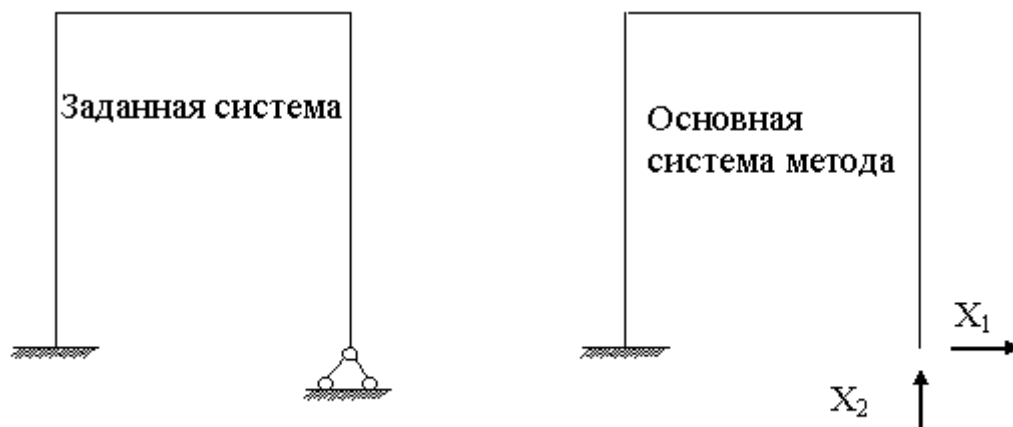


Рис. 6.1

Из выражения (6.2) очевидно, что рама, изображённая на рис. 6.1, является дважды статически неопределимой системой.

Статически неопределимые системы обладают следующими свойствами:

1. В статически неопределимых системах, по сравнению со статически определимыми, при одной и той же нагрузке значения внутренних усилий получаются меньшими.
2. Статически неопределимые системы являются более жёсткими по сравнению со статически определимыми.
3. Разрушение «лишних» связей в статически неопределимых системах не ведёт к разрушению всей системы.
4. В статически неопределимых системах температурные воздействия и осадка опор вызывают появление дополнительных усилий в отличие от статически определимых систем.

Основная система метода сил

Любой способ раскрытия статической неопределимости предполагает выбор для заданной системы основной системы. В методе сил основную систему выбирают из заданной, устраняя «лишние» связи. За «лишние» могут быть приняты как внешние, так и внутренние связи. Внешние связи являются опорными связями, а внутренними являются связи, препятствующие взаимному перемещению двух смежных сечений при мысленном рассечении стержня или удалении из него шарнира.

Для любой статически неопределимой системы существует несколько вариантов основной системы.

Рациональной основной системой является такая, для которой при её решении наиболее просто составляются уравнения статики.

Основная система метода сил должна быть желательно статически определимой и геометрически неизменяемой. Для того чтобы основная система оставалась эквивалентна заданной, вместо устранённых «лишних» связей вводят неизвестные усилия X . На рис. 6.2 приведены два варианта основной системы. В качестве «лишних» связей выбраны внешние.



Рис. 6.2

Наиболее простым представляется II вариант основной системы.

На рис. 6.3 для заданной системы приведена основная система, где за «лишние» выбраны внутренние связи, полученные путём мысленного устранения внутреннего шарнира.

Основная система, принятая для расчёта и нагруженная внешней нагрузкой и усилиями X , приложенными вместо устранённых связей, будет эквивалентна заданной в случае, если перемещения в этих системах равны между собой.

Если при расчёте удаляются внешние связи, то условием эквивалентности будет равенство нулю перемещений по направлению устранённых связей. Если за «лишние» связи приняты внутренние, то условием эквивалентности будет равенство нулю взаимных перемещений смежных поперечных сечений в месте разреза системы.

Для заданных систем, имеющих n лишних связей, условие эквивалентности имеет вид

$$\Delta_1 = 0; \dots; \Delta_i = 0; \dots; \Delta_n = 0, \quad (6.3)$$

где Δ_i – перемещения по направлению удаленных связей.

Используя принцип независимости действия сил, условие (6.3) запишем в виде

$$\Delta_i = \Delta_{i1} + \Delta_i + \dots + \Delta_i + \dots + \Delta_{ik} + \dots + \Delta_{iF} = 0, \quad (6.4)$$

где Δ_{ik} – перемещение по направлению i -й удалённой связи, вызванной действием k -й неизвестной силы; Δ_{iF} – перемещение по направлению i -й удалённой связи от действия нагрузки.

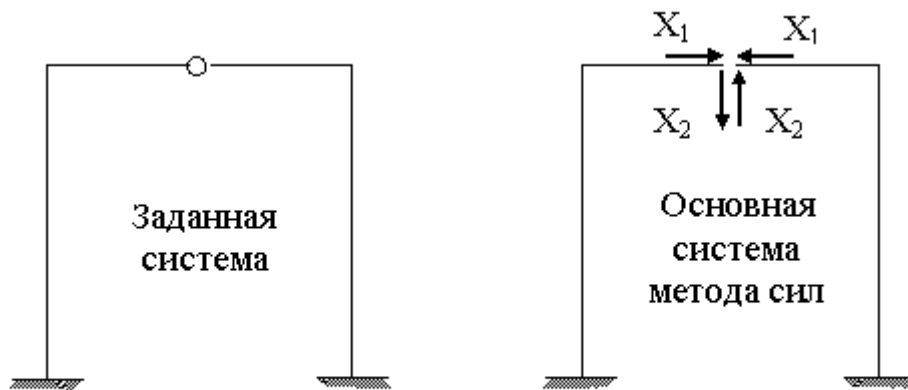


Рис. 6.3

Канонические уравнения метода сил

Любое перемещение, вызванное какой-либо силой, для линейно деформируемых систем можно выразить в виде произведения этой силы на перемещение от действия единичной силы:

$$\Delta_{ik} = X_k \delta_{ik}, \quad (6.5)$$

где X_k – искомое усилие; δ_{ik} – перемещение по направлению i -й связи основной системы от действия силы $X_k = 1$.

Для статически неопределимой системы с n «лишними» связями система уравнений имеет вид

[illegible]

Система (6.6) называется системой канонических уравнений метода сил. В связи с тем, что заданная рассчитываемая статически неопределимая конструкция под действием внешних и внутренних сил находится в равновесии, каждое уравнение системы уравнений (6.6) отрицает наличие перемещений по направлению устранённых связей.

Коэффициенты с одинаковыми индексами называются главными и могут быть только положительными.

Коэффициенты с разными индексами называются побочными, они могут быть как положительными, так и отрицательными. Побочные коэффициенты обладают свойством взаимности, т.е. $\delta_{ij} = \delta_{ji}$.

Коэффициенты A_{ij} называются грузовыми и представляют собой перемещения в основной системе в направлении i -й устранённой связи от заданной внешней нагрузки.

Определение коэффициентов канонических уравнений

Вычисление коэффициентов при неизвестных системы канонических уравнений метода сил и её грузовых членов, представляющих единичные и грузовые перемещения, проводится с помощью известных методов определения перемещений, изложенных в предыдущем разделе.

Обычно при расчёте систем с прямолинейными элементами применяется правило П.Верещагина, в соответствии с которым осуществляется перемножение эпюр. При этом, если рассматриваются так называемые изгибные конструкции (балки, рамы и арки), то определение перемещений ведётся с учётом только изгибающих моментов M , так как перемещения, учитывающие значения продольных N и поперечных Q сил, оказываются несопоставимо малыми по сравнению с теми, которые имеют место от действия изгибающего момента M , и ими пренебрегают.

Для определения единичных коэффициентов используют формулу

$$\delta_{ik} = \sum \frac{\partial n.\bar{M}_i \cdot \partial n.\bar{M}_k}{EJ} = \sum \frac{\omega_i \cdot y_k}{EJ}, \quad (6.7)$$

где $\partial n.\bar{M}_i$ – эпюра изгибающих моментов, построенная в основной системе от действия неизвестной силы $X_i = 1$, приложенной в точке устранения i -й «лишней» связи; $\partial n.\bar{M}_k$ – эпюра изгибающих моментов, построенная в основной системе от действия неизвестной силы $X_k = 1$, приложенной в точке устранения k -й «лишней» связи; ω_i – площадь эпюры изгибающих моментов \bar{M}_i ; y_k – координата на эпюре \bar{M}_k , расположенная под центром тяжести эпюры \bar{M}_i .

Свободные члены системы канонических уравнений (6.6) метода сил определяют по формуле

$$\Delta_{iF} = \sum \frac{\partial n.M_F^0 \cdot \partial n.\bar{M}_i}{EJ} = \sum \frac{\omega_F \cdot y_i}{EJ}, \quad (6.8)$$

где $\partial n.M_F^0$ – эпюра изгибающих моментов (грузовая эпюра), построенная в основной системе от действия заданных внешних нагрузок; ω_F – площадь грузовой эпюры M_F^0 ; y_i – ордината на эпюре \bar{M}_i , расположенная под центром тяжести грузовой эпюры M_F^0 .

Для проверки правильности определения коэффициентов при неизвестных строят в соответствии с выражением (6.9) суммарную единичную эпюру \bar{M}_S .

$$\text{Эп. } \bar{M}_S = \sum_{i=1}^n \partial n.\bar{M}_i. \quad (6.9)$$

Правильность определения коэффициентов δ_{ik} (единичных перемещений) при неизвестных в системе канонических уравнений метода сил в соответствии с универсальной проверкой осуществляется выражением (6.10), согласно которому квадрат суммарной единичной эпюры \bar{M}_S равен сумме всех коэффициентов при неизвестных:

$$\frac{\partial n.\bar{M}_S^2}{EJ} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \delta_{ik}. \quad (6.10)$$

В случае неудовлетворения равенства (6.10) осуществляют согласно выражению (6.11) построчную проверку, когда произведение суммарной единичной эпюры \bar{M}_S на любую единичную эпюру должно дать сумму единичных перемещений того уравнения, на единичную эпюру которой осуществлялось перемножение:

$$\frac{\partial n.\bar{M}_S \cdot \partial n.\bar{M}_k}{EJ} = \sum_{k=1}^n \delta_{ik} \quad (6.11)$$

Правильность определения свободных членов системы канонических уравнений метода сил осуществляется в соответствии с выражением (6.12). В соответствии с (6.12) суммарную единичную эпюру \bar{M}_S умножают на грузовую эпюру M_F^0 . Результат этого умножения должен быть равен сумме свободных членов системы канонических уравнений:

$$\frac{\partial n.\bar{M}_S \cdot \partial n.M_F^0}{EJ} = \sum A_{iF} \quad (6.12)$$

После контроля правильности определения параметров системы канонических уравнений их подставляют в эту систему. В результате решения полученной системы линейных алгебраических уравнений находят значения «лишних» неизвестных X_i .

Построение эпюр внутренних усилий в заданной системе

Основная система, в которой определены значения всех «лишних» неизвестных, представляет собой статически определимую систему с действующими на неё заданной внешней нагрузкой и усилиями X_i . Для построения эпюр внутренних усилий M , N , Q составляются аналитические выражения этих внутренних усилий для характерных участков рассчитываемой конструкции.

Кроме того, для построения эпюр внутренних усилий может быть использован также приём, основанный на принципе независимости действия сил. На основании этого принципа для заданной n раз статически неопределимой системы усилия определяются в соответствии с выражением

$$M = M_F^0 + \sum \bar{M}_i \cdot X_i \quad (6.13)$$

По полученным ординатам (6.13) строят эпюру M в заданной системе. Достаточным условием правильности построения эпюры M является проведение деформационной проверки. Для проведения деформационной

проверки из заданной рассчитываемой системы выбирают любую основную систему метода сил, в которой строят любую эпюру моментов \bar{M}_i от действия неизвестной силы $X_i = 1$.

$$\frac{\text{Эп.}M \cdot \text{Эп.}\bar{M}_i(\text{мет.сил})}{EJ} = 0$$

Соблюдение условия свидетельствует о правильности построения эпюры M . Поперечные силы в заданной системе определяются по известной из теории изгиба дифференциальной зависимости

$$Q_x = \frac{dM}{ds} = \alpha = Q_x^0 + \frac{M_{\text{прав}} - M_{\text{лев}}}{\ell}, \quad (6.14)$$

где α – угол между эпюрой M и осью стержня рамы; Q_x^0 – балочное значение поперечной силы.

Продольные силы N в заданной системе определяют путём вырезания узлов на эпюре Q_x . Составляют уравнения равновесия для этих узлов, проецируя силы на оси стержней, из которых и находят искомые значения усилий N .

По эпюрам M , Q , N определяют реактивные усилия в опорах рассчитываемой рамы и проводят две проверки правильности построения итоговых эпюр внутренних усилий.

Узловая проверка. Вырезая узлы на эпюре M , составляют уравнения равновесия статики $\sum M$, равенство нулю которых свидетельствует о правильности построенной эпюры M .

Статическая проверка. Для осуществления статической проверки показывают заданную схему рамы с действующей на неё заданной внешней нагрузкой, найденными усилиями X_i и усилиями в опорных связях Q и N . Справедливость уравнений статики $\sum x = 0$ и $\sum y = 0$ свидетельствует о правильности построенных эпюр Q и N .

Расчёт статически неопределимых рам методом сил на температурные воздействия

Воздействие на конструкцию температуры является одним из видов внешнего силового фактора. Поэтому система канонических уравнений в этом случае будет отличаться от уравнений (6.6) только свободными членами.

[illegible]

В системе уравнений (6.15) коэффициенты при неизвестных (единичные перемещения) определяются так же, как при расчёте на действие статической нагрузки, тогда как свободный член Δ_{it} системы (6.15) представляет собой перемещение в основной системе рассчитываемой рамы по направлению устранённой i -й связи от действия температуры.

В результате решения системы уравнений (6.15) находят значения неизвестных усилий X_{it} . Тогда эпюра M^f может быть построена в соответствии с выражением

$$M^f = \sum_{i=1}^n \overline{M}_i \cdot X_{if} \quad (6.16)$$

В основной системе рамы от действия температуры возникают только перемещения, а внутренние усилия при этом равны нулю. В заданной системе рамы возникают как перемещения, так и внутренние усилия. Рассмотрим пример расчёта статически неопределимой рамы (рис. 6.4), в качестве внешней нагрузки на которую действует изменение температуры.

Исходные данные для расчёта: $\ell=10$ м; α – коэффициент линейного температурного расширения; t_1 – температура наружных волокон рамы; t_2 – температура внутренних волокон; $t_1 > t_2$; $h = 0,125\ell$ – высота поперечного сечения рамы (рис. 6.5).

Степень статической неопределимости заданной системы определится из выражения

$$n = 3K - III = 3 \cdot 2 - 4 = 2. \quad (6.17)$$

Из (6.17) очевидно, что заданная система является дважды статически неопределимой.



Рис. 6.4

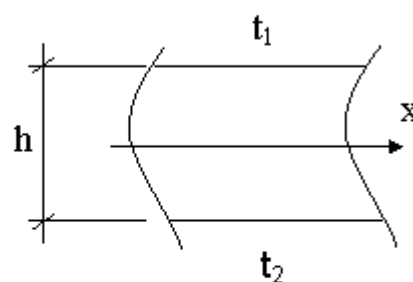


Рис. 6.5

Основная система рамы выбрана из заданной путём устранения из неё двух простых кинематических опорных связей. Для того чтобы основная система рамы была эквивалентна заданной, вместо устранённых связей поставлены искомые усилия X_{1t} и X_{2t} .

В связи с тем, что при определении перемещений от действия температуры учитывается влияние и изгибающих моментов M , и продольных сил N , единичные эпюры построены для этих силовых факторов. На рис. 6.7 и 6.8 представлены эпюры от действия соответственно $X_1=1$ и $X_2 = 1$.

Система канонических уравнений в данной задаче принимает вид выражения

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_{1t} + \delta_{12} \cdot X_{2t} + \Delta_{1t} = 0; \\ \delta_{21} \cdot X_{1t} + \delta_{22} \cdot X_{2t} + \Delta_{2t} = 0. \end{cases} \quad (6.18)$$



Рис. 6.6

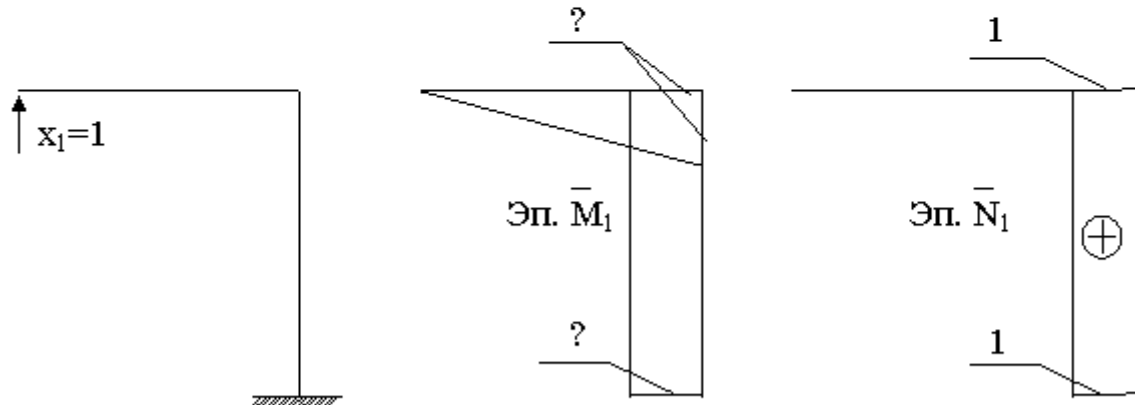


Рис. 6.7

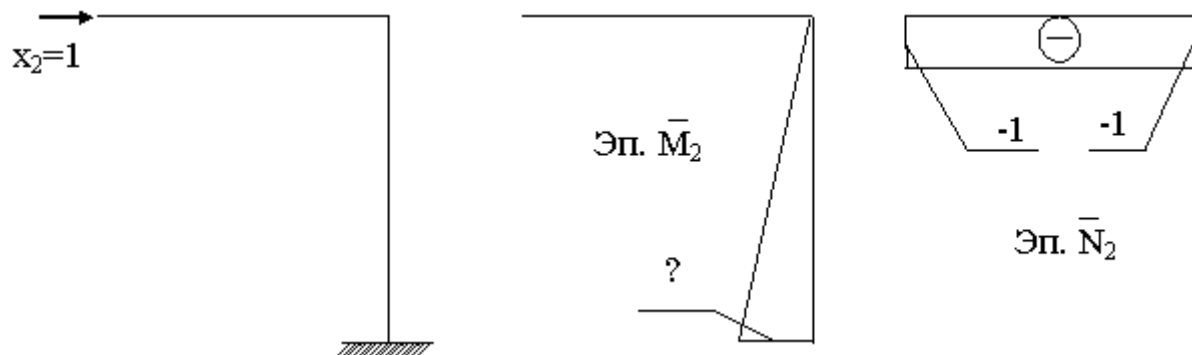


Рис. 6.8

Определим коэффициенты канонических уравнений:

$$\begin{aligned}
\delta_{11} &= \frac{\partial n \cdot \bar{M}_1 \cdot \partial n \cdot \bar{M}_1}{EJ} = \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot \ell \cdot \frac{2}{3} \ell \cdot \frac{1}{EJ} + \ell \cdot \ell \cdot \ell \cdot \frac{1}{2 EJ} = \frac{5\ell^3}{6 EJ}; \\
\delta_{12} &= \delta_{21} = \frac{\partial n \cdot \bar{M}_1 \cdot \partial n \cdot \bar{M}_2}{EJ} = \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot \ell \cdot \ell \cdot \frac{1}{2 EJ} = \frac{\ell^3}{4 EJ}; \\
\delta_{22} &= \frac{\partial n \cdot \bar{M}_2 \cdot \partial n \cdot \bar{M}_2}{EJ} = \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot \ell \cdot \frac{2}{3} \ell \cdot \frac{1}{2 EJ} = \frac{\ell^3}{6 EJ}.
\end{aligned} \tag{6.19}$$

Свободные члены системы канонических уравнений (6.19) определим по формулам предыдущего раздела:

$$\Delta_{it} = \pm \sum \alpha \cdot \frac{\Delta t}{h} \cdot \Omega_{\bar{M}} \pm \alpha \cdot t_{cp} \cdot \Omega_{\bar{N}}, \tag{6.20}$$

где $\Delta t = t_1 - t_2$ – изменение температур; h – высота поперечного сечения элемента; $\frac{\ell}{h} = 8$; $t_1 = 30^\circ$; $t_2 = 20^\circ$ C; $\Omega_{\bar{M}}$ – площадь эпюры моментов \bar{M}_i в основной системе; $\Omega_{\bar{N}}$ – площадь эпюры продольных сил \bar{N}_i в основной системе.

Знаки в (6.20) определяют, сравнивая деформации от температуры и от единичного воздействия. Если кривизна от силы и температуры одного знака, то знак в слагаемом берётся плюс.

Если деформации от силы и от температуры одного знака, то второе слагаемое будет положительное.

$$\Delta_{1t} = \alpha \frac{\Delta t}{2} \cdot \ell + \frac{\alpha \Delta t}{h} \left(\frac{1}{2} \cdot \ell \cdot \ell + \ell \cdot \ell \right) = \frac{\alpha \Delta t \ell}{2} \left(1 + 3 \frac{\ell}{h} \right);$$

$$\Delta_{2t} = -\alpha \frac{\Delta t}{2} \cdot \ell + \alpha \cdot \frac{\Delta t}{h} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot \ell = \frac{\alpha \Delta t \ell}{2} \left(\frac{\ell}{h} - 1 \right).$$

Подставляя найденные значения перемещений (6.19) и (6.20) в систему уравнений (6.18), получают систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{5}{6} \cdot \frac{\ell^3}{EJ} \cdot X_{1t} + \frac{\ell^3}{4 EJ} \cdot X_{2t} + \frac{\alpha \Delta t \ell}{2} \cdot \left(1 + 3 \frac{\ell}{h} \right) = 0; \\ \frac{\ell^3}{4 EJ} \cdot X_{1t} + \frac{\ell^3}{6 EJ} \cdot X_{2t} - \frac{\alpha \Delta t \ell}{2} \cdot \left(1 - \frac{\ell}{h} \right) = 0. \end{cases} \tag{6.21}$$

После решения любым известным в математике методом системы канонических уравнений (6.21) находят значения X_{1t} и X_{2t} усилий в «лишних» связях от действия температуры.

$$X_{1t} = \frac{-15,8362 EJ \alpha \Delta t}{\ell^2} = -1,5836 EJ \alpha \quad ; \quad X_{2t} = \frac{2,4575 EJ \alpha \Delta t}{\ell^2} = 0,2457 EJ \alpha$$

Умножая эпюру \bar{M}_1 на X_{1t} , а эпюру \bar{M}_2 – на X_{2t} и суммируя их, получим эпюру M^t , от действия температуры (рис. 6.9).

По эпюре M^t , используя дифференциальную зависимость между Q и M , определяем

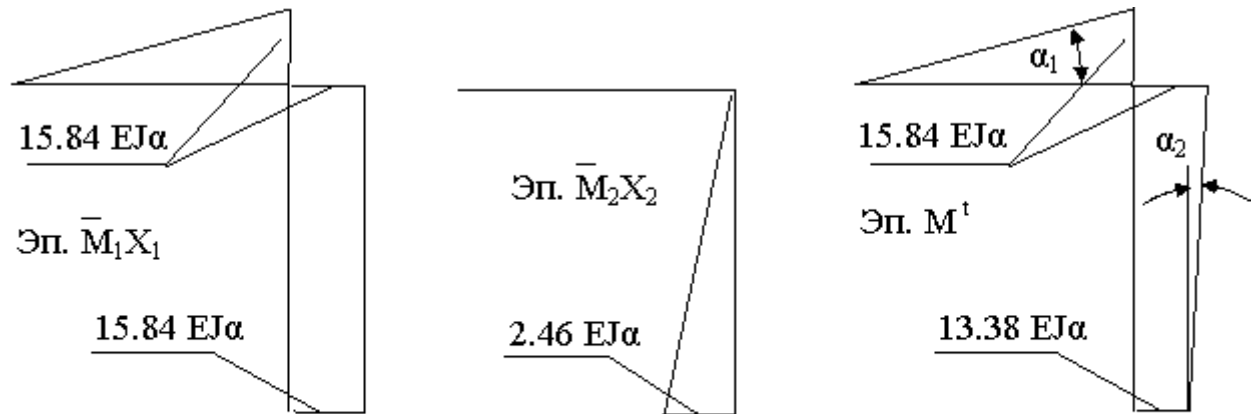


Рис. 6.9

$$Q_{\text{ригель}} = \operatorname{tg} \alpha_1 = -1,8362 EJ \alpha;$$

$$Q_{\text{стойка}} = \operatorname{tg} \alpha_2 = + \frac{(15,8362 - 13,3787) EJ \alpha}{10} ;$$

$$Q_{\text{стойка}} = \frac{2,4575 EJ \alpha \Delta t}{\ell^2} = 0,2457 EJ \alpha$$

По полученным значениям строим итоговую эпюру поперечных сил в заданной системе (рис. 6.10). Для построения эпюры продольных сил N_t на эпюре Q_t вырезаем узел С (рис. 6.11).

Составляем условия равновесия узла С:

$$\sum x = -2,4575 \frac{EJ\alpha\Delta t}{\ell^2} - N_{пуз} = 0 ; (6.22)$$

$$\sum y = -N_{см} - 1,58362 \frac{EJ\alpha\Delta t}{\ell^2} = 0 . (6.23)$$

Из (6.22) и (6.23) находим $N_{пуз} = -0,24575 EJ\alpha$; $N_{см} = -1,58362 EJ\alpha$.

По полученным значениям строим эпюру N^t (рис. 6.12).

Проверки правильности построенных эпюр:

- Статическая проверка.

Для заданной рамы покажем все реактивные усилия, взятые с эпюр Q^t , N^t и M^t (рис. 6. 13).

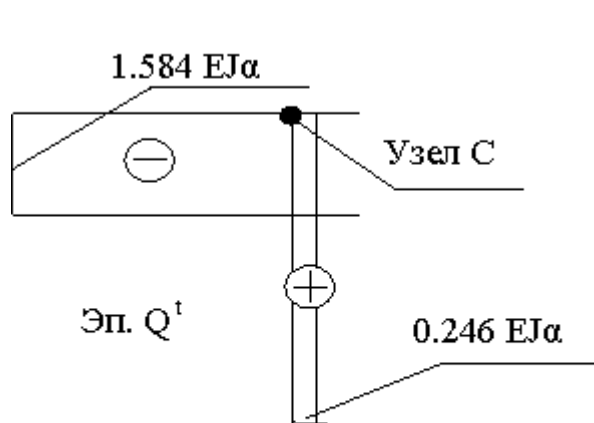


Рис. 6.10

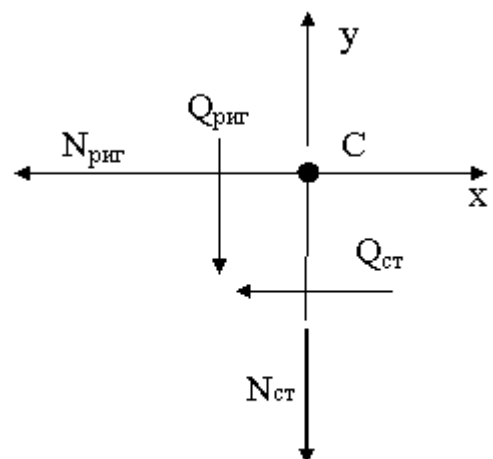


Рис. 6.11

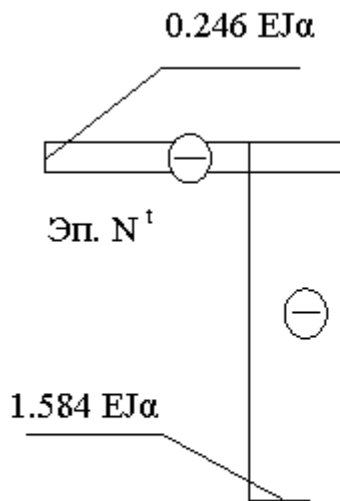


Рис. 6.12

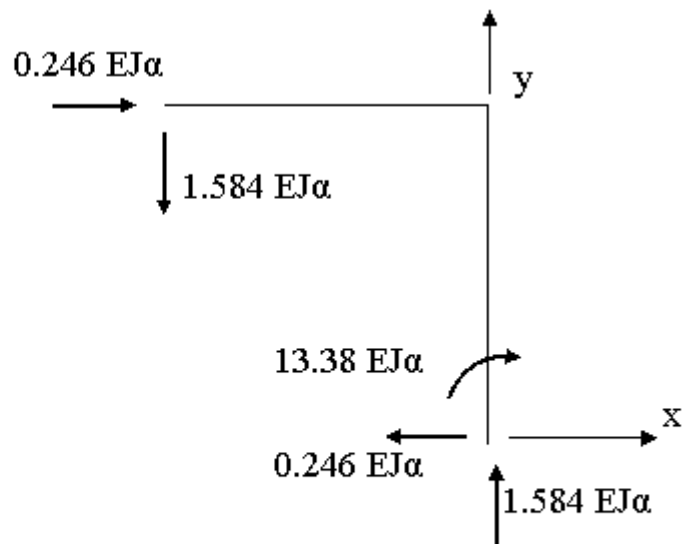


Рис. 6.13

Составим уравнения равновесия для рамы:

$$\sum x = -\frac{2,4575 EJ\alpha\Delta t}{\ell^2} + \frac{2,4575 EJ\alpha\Delta t}{\ell^2} = 0;$$

$$\sum y = -\frac{15,8362 EJ\alpha\Delta t}{\ell^2} + \frac{15,8362 EJ\alpha\Delta t}{\ell^2} = 0;$$

$$\sum m_A = -\frac{13,3787 EJ\alpha\Delta t}{\ell} + \frac{2,4575 EJ\alpha\Delta t}{\ell^2} \cdot \ell - \frac{-15,8362 EJ\alpha\Delta t}{\ell^2} \cdot \ell = 0$$

Статическая проверка выполнена и подтвердила правильность построенных эпюр.

•Деформационная проверка.

Результат перемножения эпюр Mt на единичную эпюру в основной системе (при воздействии температуры) равняется Δ_{it} , где Δ_{it} – температурное перемещение в направлении X_i в основной системе.

$$\sum \frac{\partial n.M^t \cdot \partial n.\bar{M}_1}{EJ} = -\Delta_{1t} \quad \sum \frac{\partial n.M^t \cdot \partial n.\bar{M}_2}{EJ} = -\Delta_{2t}$$

Проверим эти условия:

Рассмотрим пример расчёта статически неопределимой рамы на смещение опор (рис. 6.14). Левая опора рамы сместилась в вертикальном направлении на величину c . Построим эпюры внутренних усилий при смещении этой опоры. Степень статической неопределимости рассматриваемой рамы и её основная система метода сил определены в предыдущем примере.

Канонические уравнения метода сил запишутся в виде

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_{1\Delta} + \delta_{12} \cdot X_{2\Delta} + \Delta_{1\Delta} = 0; \\ \delta_{21} \cdot X_{1\Delta} + \delta_{22} \cdot X_{2\Delta} + \Delta_{2\Delta} = 0. \end{cases} \quad (6.26)$$

В данном примере найденные по выражению (6.25) $\Delta_{1\Delta} = c$; $\Delta_{2\Delta} = 0$.

Если подставить найденные перемещения в канонические уравнения метода сил и решить эту систему, то окажется, что

$$X_{1\Delta} = \frac{24}{11} \cdot \frac{EJ}{\ell^3} \cdot c; \quad X_{2\Delta} = \frac{36}{11} \cdot \frac{EJ}{\ell^3} \cdot c.$$

Итоговая эпюра изгибающих моментов от осадки опор в заданной системе может быть построена по известному выражению

$$\mathcal{E}n M^{\Delta} = \mathcal{E}n \bar{M}_1 \cdot X_{1\Delta} + \mathcal{E}n \bar{M}_2 \cdot X_{2\Delta}. \quad (6.27)$$

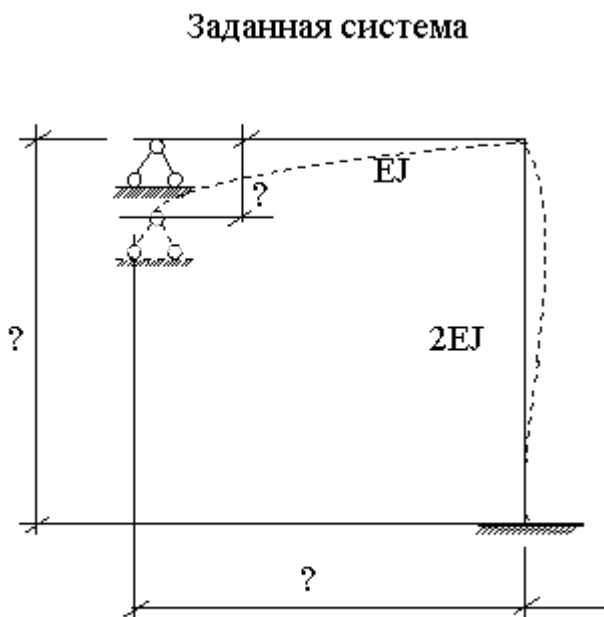


Рис. 6.14



Рис. 6.15

На рис. 6.16 показано построение итоговой эпюры моментов в заданной системе от смещения опор.

По итоговой эпюре моментов M^Δ строим итоговую эпюру поперечных сил $Q_{итог}^\Delta$ в соответствии с выражением

$$Q^\Delta = \frac{dM^\Delta}{d\ell} = \operatorname{tg}\alpha. \quad (6.28)$$

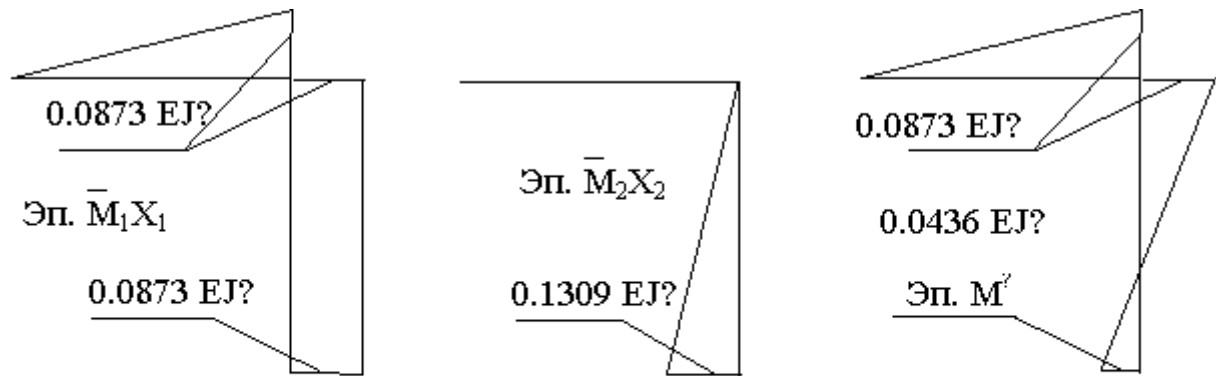


Рис. 6.16

Тогда

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = Q^{пуз} = -\frac{24EJ}{11\ell^3} \cdot c;$$

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = Q^{см} = -\frac{36}{11} \cdot \frac{EJ}{\ell^3} \cdot c.$$

На рис. 6.17 показана эпюра поперечных сил Q^Δ в заданной системе от осадки опор.

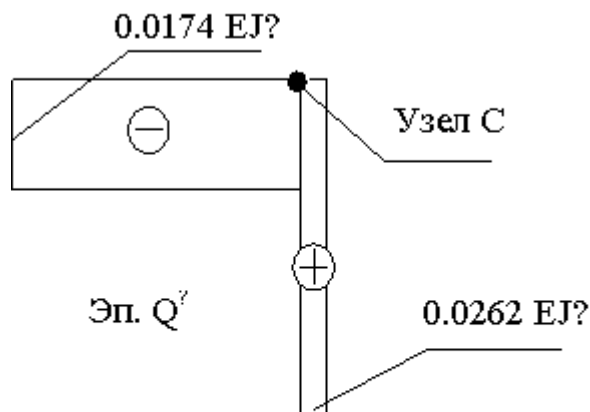


Рис. 6.17

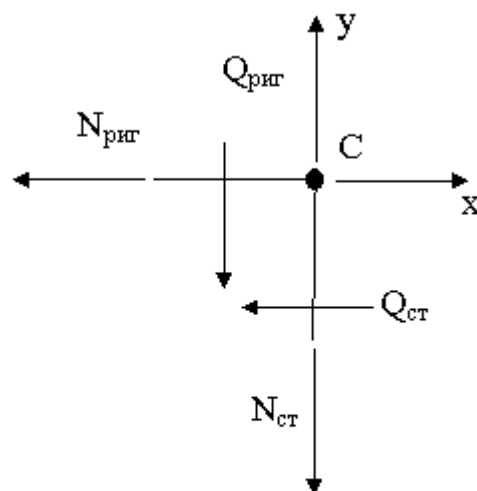


Рис. 6.18

Для построения эпюры продольных сил вырежем узел С на эпюре Q^Δ и рассмотрим его равновесие (рис. 6.18).

$$\sum x = -\frac{36}{11} \frac{EJc}{\ell^3} - N_{\text{риг}} = 0; \quad \sum y = -\frac{24}{\ell^3} EJc - N_{\text{ст}} = 0 \quad (6.29)$$

Из уравнений равновесия (6.29) находим

$$N_{\text{риг}} = -\frac{36 EJc}{11 \ell^3} \quad \text{— продольная сила в ригеле;}$$

$$N_{\text{ст}} = -\frac{24 EJc}{\ell^3} \quad \text{— продольная сила в стойке.}$$

По полученным значениям строим эпюру продольных сил N^Δ в заданной системе от осадки опор (рис. 6.19). Проведём статическую проверку правильности построенных эпюр. На рис. 6.20 показана схема рамы с опорными реакциями, возникшими в ней от осадки опор. Составляем уравнения равновесия, записав суммы проекций сил, действующих на раму, соответственно на оси x и y.

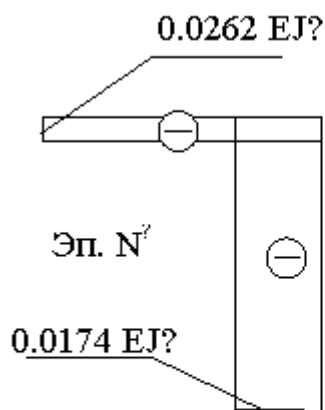


Рис. 6.19

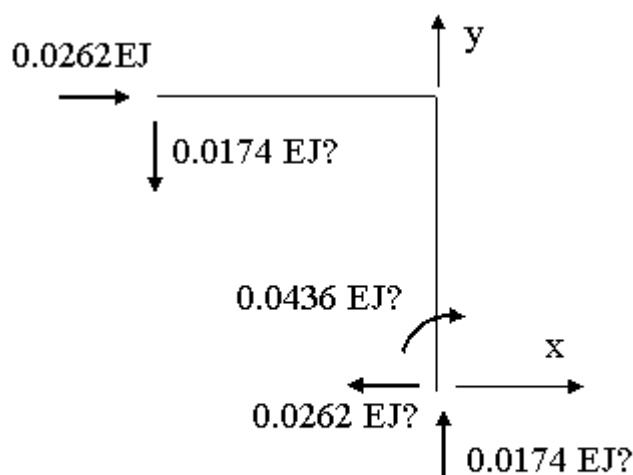


Рис. 6.20

$$\sum x = -\frac{36}{11} \frac{EJc}{\ell^3} - \frac{36}{11} \frac{EJc}{\ell^3} = 0; \quad \sum y = -\frac{24}{11} \frac{EJc}{\ell^3} + \frac{24}{11} \frac{EJc}{\ell^3} = 0;$$

$$\sum m = -\frac{36}{11} \frac{EJc}{\ell^3} \cdot \ell - \frac{24}{11} \frac{EJc}{\ell^3} \cdot \ell - \frac{12 EJc}{11 \ell^2} = 0.$$

Уравнения равновесия выполняются, что свидетельствует о правильности выполненных расчётов.

РАСЧЁТ НЕРАЗРЕЗНЫХ БАЛОК

Уравнение трех моментов

Неразрезной называется статически неопределимая балка, прикреплённая к земле более чем тремя простыми кинематическими связями.

При расчёте неразрезных балок опоры принято нумеровать слева направо. На рис. 7.1 показана многопролётная неразрезная балка и её основная система, выбранная в соответствии с методом сил.

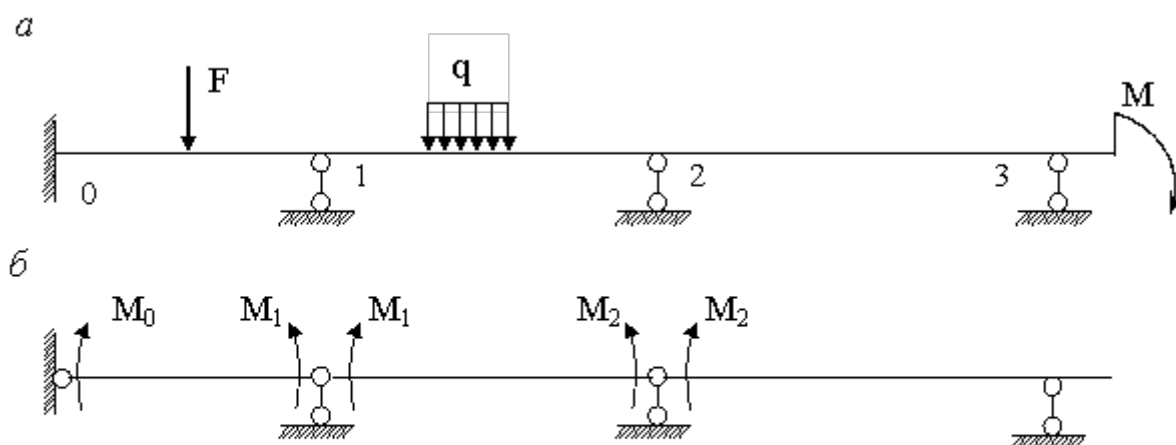


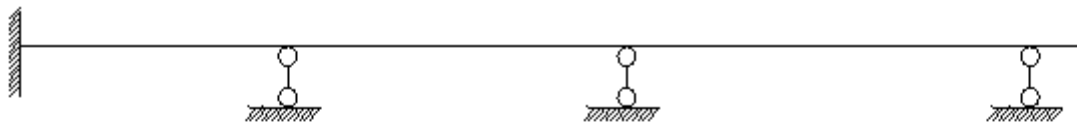
Рис. 7.1

Степень статической неопределимости для неразрезных балок можно определять несколькими способами. Наиболее рациональным из них является способ, который заключается в том, что считают общее число простых кинематических связей, которыми балка прикреплена к земле. Из этого числа вычитают цифру 3, означающую минимально необходимое число простых кинематических связей для жёсткого прикрепления балки к земле. Полученное таким образом число представляет собой степень статической неопределимости рассматриваемой неразрезной балки. Так, показанная на рис. 7.1, а балка прикреплена к земле шестью простыми кинематическими связями. Значит, степень её статической неопределимости равна трём.

Если рассчитывать неразрезную балку методом сил, то наиболее рациональной основной системой для неё является такая, в которой в надпорные сечения неразрезной балки введены шарниры, высвобождающие каждый одну степень свободы (рис. 7.1, б), давая возможность углового перемещения φ надпорных сечений балки.

На рис. 7.2 построены единичные эпюры моментов для неразрезной три раза статически неопределимой балки.

Заданная система



Основная система метода сил

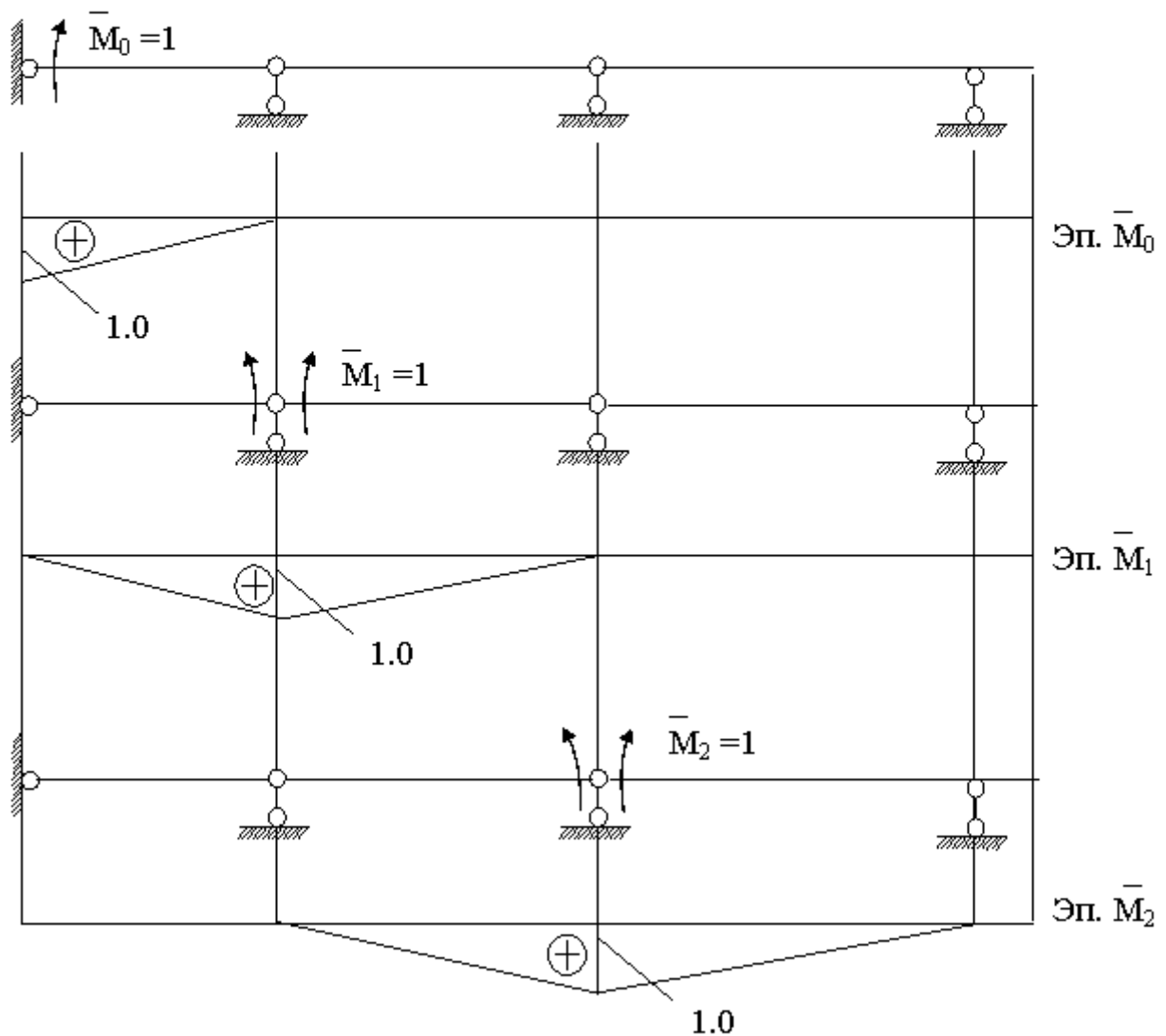


Рис. 7.2

Сопоставляя эти эпюры, можно сделать вывод о том, что в каждом из канонических уравнений метода сил будут иметь место только три коэффициента при неизвестных. Выделим из рассматриваемой неразрезной

балки (рис. 7.3), имеющей по всей длине жёсткость $EJ=\text{const}$, два сопряжённых друг с другом пролёта.

Определяем угол поворота φ_n (см. рис. 7.3) на n опоре в основной системе:

$$\varphi_n = \delta_{n,n-1} \cdot M_{n-1} + \delta_{n,n} \cdot M_n + \delta_{n,n+1} \cdot M_{n+1} + \Delta_{nF} = 0 \quad (7.1)$$

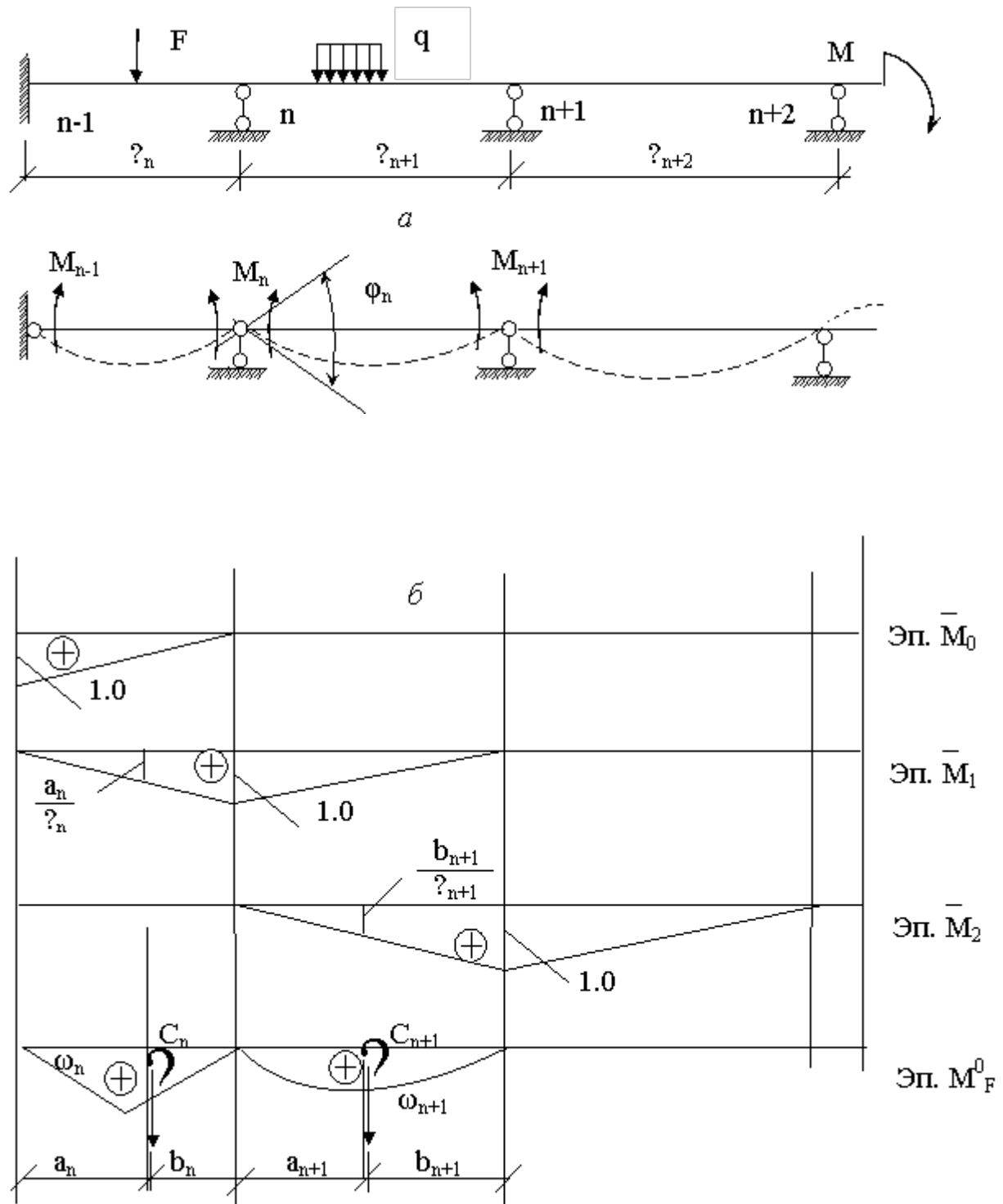


Рис. 7.3

Перемножением соответствующих единичных эпюр определим коэффициенты при неизвестных.

$$\delta_{n,n-1} = \sum \frac{\partial n \bar{M}_n \cdot \partial n \bar{M}_{n-1}}{EJ} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ell_n \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{\ell_n}{6EJ} \quad (7.2)$$

$$\delta_{n,n} = \frac{\partial n \bar{M}_n^2}{EJ} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ell_n \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ell_{n+1} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{6EJ} (\ell_n + \ell_{n+1}) \quad (7.3)$$

$$\delta_{n,n+1} = \sum \frac{\partial n \bar{M}_n \cdot \partial n M_{n+1}}{EJ} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ell_{n+1} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{\ell_{n+1}}{6EJ} \quad (7.4)$$

При определении грузового перемещения Δ_{nF} на грузовой эпюре M_F^o приняты обозначения: ω_n и ω_{n+1} – площади грузовых эпюр моментов (метода сил) соответственно для пролётов ℓ_n и ℓ_{n+1} ; a_n и b_{n+1} – расстояния от центра тяжести этих эпюр (см. рис. 7.3) соответственно до опор (n–1) и (n+1).

$$\Delta_{nF} = \sum \frac{\partial n M_F^o \cdot \partial n \bar{M}_n}{EJ} = \frac{1}{EJ} \cdot \omega_n \cdot \frac{a_n}{\ell_n} + \frac{1}{EJ} \cdot \omega_{n+1} \cdot \frac{b_{n+1}}{\ell_{n+1}} \quad (7.5)$$

Подставим найденные перемещения в (7.1), перенося грузовое перемещение в правую часть уравнения и сокращая все слагаемые на изгибную жёсткость EJ:

$$\frac{\ell_n}{6} \cdot M_{n-1} + \frac{2(\ell_n + \ell_{n+1})}{6} \cdot M_n + \frac{\ell_{n+1}}{6} \cdot M_{n+1} = - \left(\frac{a_n \cdot \omega_n}{\ell_n} + \frac{b_{n+1} \cdot \omega_{n+1}}{\ell_{n+1}} \right) \quad (7.6)$$

Следует обратить внимание на правую часть выражения (7.6). По сути, она представляет собой сумму двух условных (фиктивных) опорных реакций, полученных от загрузки условной нагрузкой, описанной по закону

построенных грузовых эпюр M_F^o . Обозначив $B_n^\phi = \frac{a_n \cdot \omega_n}{\ell_n}$ и $A_{n+1}^\phi = \frac{b_{n+1} \cdot \omega_{n+1}}{\ell_{n+1}}$, а их сумму $(B_n^\phi + A_{n+1}^\phi)$ за R_n^ϕ и подставив их в выражение (7.6), получим уравнение, которое в строительной механике носит название уравнения трёх моментов.

$$\ell_n \cdot M_{n-1} + 2(\ell_{n+1} + \ell_n) \cdot M_n + \ell_{n+1} \cdot M_{n+1} = -6R_n^\phi \quad (7.7)$$

При расчёте многопролётных неразрезных балок на статическую нагрузку для каждой промежуточной опоры записывают уравнение трёх моментов. Таких уравнений записывают столько, сколько раз является статически неопределимой рассчитываемая балка. В результате решения полученной таким образом системы алгебраических уравнений находят значения опорных моментов. Строят эпюру опорных моментов, которую геометрически складывают с грузовой эпюрой M_F^0 . В результате сложения получают эпюру моментов в заданной системе.

В прил. 2 приведены значения фиктивных опорных реакций A_n^{Φ} и B_n^{Φ} для наиболее характерных случаев загрузки однопролётных балок.

Расчет статически неопределимых систем методом перемещений

Основы метода

Метод перемещений в строительной механике является во многом основополагающим для большинства современных методов (метод конечных элементов и др.) раскрытия статической неопределимости сложных стержневых конструкций.

В методе сил за неизвестные принимают усилия X_i в устранённых связях, а дополнительными уравнениями являются условия совместности основной и заданной систем, записываемых в виде уравнений, описывающих равенство перемещений в направлении этих устранённых связей.

В методе перемещений, наоборот, неизвестные выбирают в виде перемещений Z_i , а дополнительными уравнениями являются условия совместности основной и заданной систем, записанных в виде статических уравнений.

Основная система в методе сил обычно выбирается статически определимой.

В методе перемещений основная система всегда статически неопределимая.

Метод перемещений имеет преимущество перед методом сил в том, что для сложных конструкций количество неизвестных в методе перемещений меньше, чем в методе сил. Другим преимуществом метода перемещений перед методом сил является то, что в методе перемещений для любой заданной системы возможен только один вариант основной системы, тогда как в методе сил для заданной системы можно выбрать несколько вариантов основной системы.

При расчёте рамных систем методом перемещений принимают следующие допущения:

- а) деформациями стержней, работающих на изгиб от продольных и поперечных сил, пренебрегают;
- б) ввиду малости перемещений отрезки, соединяющие концы любого деформированного стержня, принимают равными длине самих стержней;
- в) сближение концов стержня при его изгибе как от внешней нагрузки, так и от смещения узлов рамы не учитывают.

За неизвестные в методе перемещений принимают (рис. 8.1) перемещения Z – углы поворота жестких узлов рамы и линейные смещения узлов рамы.

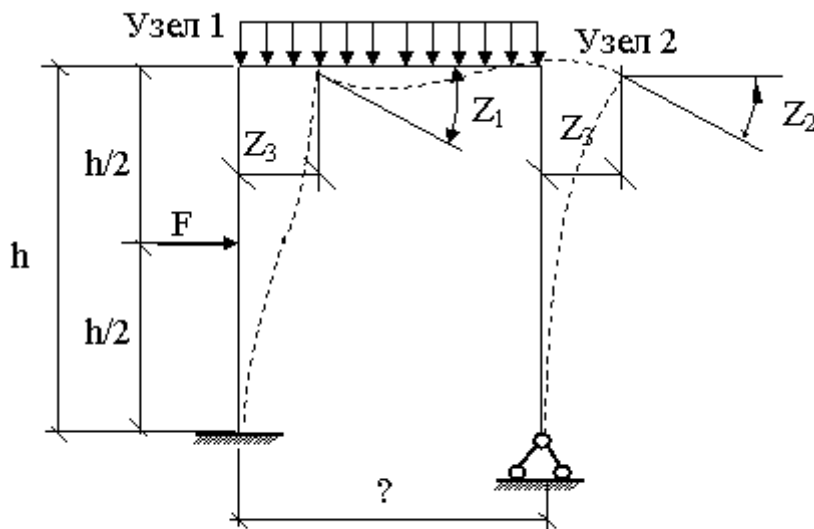


Рис. 8.1

Выбор основной системы

Основную систему в методе перемещений выбирают из заданной путём введения во все жёсткие узлы условных жёстких заделок. В направлении возможных линейных подвижек элементов заданной системы ставят условные простые кинематические связи, препятствующие линейным подвижкам этих элементов. Следует отметить, что условные жёсткие заделки предотвращают только угловые перемещения, но не препятствуют линейным перемещениям этих узлов.

В методе перемещений заданная стержневая система превращается в совокупность однопролётных статически неопределимых стержней, известные решения которых используются при расчёте рассматриваемых заданных систем.

В методе перемещений имеет место не статическая, как в методе сил, а кинематическая неопределимость заданной системы. Кинематическую неопределимость n определяют по выражению

$$n = n_y + n_{\pi}, \quad (8.1)$$

где n_y – число жестких узлов, в которые необходимо ввести условные жёсткие заделки, устраняющие возможные повороты узлов; n_{π} – число простых кинематических связей, которые необходимо ввести в заданную систему, чтобы устранить возможные линейные подвижки элементов рамы.

Пример. Определить степень кинематической неопределенности рамы, показанной на рис. 8.1.

- $n_y = 2$, т.к. рассматриваемая рама имеет два жёстких узла, обозначенных на схеме цифрами 1 и 2;
- для определения n_{π} во все узлы заданной рамы вводят шарниры (рис. 8.2), тем самым превращая заданную схему рамы в геометрически изменяемую систему.

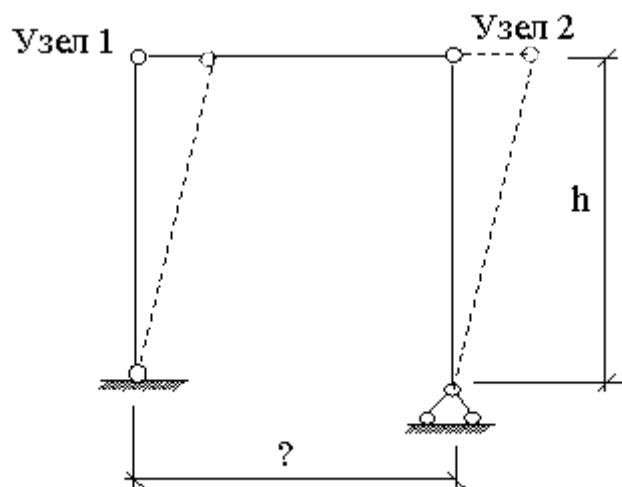


Рис. 8.2

В дальнейшем исследование такой системы сводится к определению того количества простых кинематических связей, которые необходимо поставить в неё для того, чтобы превратить её в геометрически неизменяемую систему. Для этого по формуле $n_{\pi} = 3D - 2Ш - C_0$ из первого раздела настоящего курса определяем

$$n_{\pi} = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 4 - 6 = 1. \quad (8.2)$$

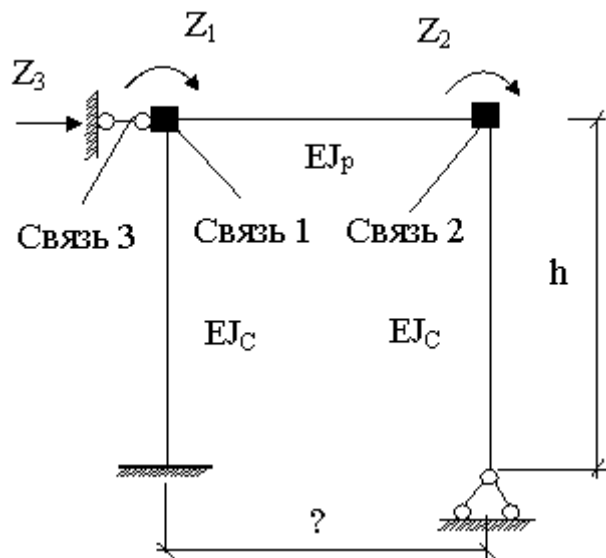
Из (8.2) очевидно, что заданная на рис. 8.1 система имеет одну линейную подвижку.

Таким образом, согласно выражению (8.1), степень кинематической неопределимости рассматриваемой рамы будет равна

$$n = n_y + n_n = 2 + 1 = 3. \quad (8.3)$$

При выборе основной системы метода перемещений в жёсткие узлы 1 и 2 заданной системы вводим условные защемления, устраняющие поворот примыкающих к этому узлу поперечных сечений стержней. Затем в направлении возможной линейной подвижки вводим одну условную простую кинематическую связь 3, которая устраняет возможное линейное смещение горизонтального элемента рамы (ригеля). На рис. 8.3 показана выбранная из заданной (см. рис. 8.1) основная система.

Из анализа основной системы видно, что она представляет собой набор однопролётных статически неопределимых балок. Как правило, такими балками являются балки двух типов – защемлённые с обеих сторон и балки, защемлённые с одной стороны и шарнирно опёртые с другой. Исходя из этого, основную систему метода перемещений в обобщённом виде можно представить как систему, состоящую из набора определённого количества конечных элементов. Однажды рассчитав эти статически неопределимые балки от действия различного вида внешней нагрузки и перемещений, их можно использовать для расчёта любых статически неопределимых стержневых систем методом перемещений. В прил. 2 приведены данные расчёта часто встречающихся в инженерной практике статически неопределимых балок.



В каждой условно введенной связи основной системы возникают реактивные усилия как от действия внешней нагрузки, так и от смещения связей. В заделках возникают реактивные моменты, а в линейных связях – реактивные усилия.

Условия эквивалентности заданной и основной систем в методе перемещений записывают в виде системы канонических уравнений

[illegible]

Канонические уравнения метода перемещений (8.4) описывают реактивные усилия в условных связях и заделках основной системы как от перемещений этих связей и заделок, так и от заданной внешней нагрузки.

Физический смысл коэффициентов при неизвестных перемещениях Z_i заключается в том, что g_{ij} представляет собой реактивное усилие в i -й условной заделке или связи в основной системе от перемещения j -й условной заделки или связи на единицу.

Физический смысл свободного члена RiF системы канонических уравнений метода перемещений заключается в том, что он представляет собой реактивное усилие в i -й условной связи или заделке от внешней нагрузки.

Равенство нулю каждого из уравнений означает, что в заданной системе нет ни заделок, ни связей, т.к. они являются условными.

Система канонических уравнений метода перемещений в матричной форме имеет следующий вид:

$$\vec{F}_{ij} \cdot \vec{Z}_i + \vec{R}_{iF} = 0, \quad (8.5)$$

где \vec{R}_{ij}^* – матрица реакций; \vec{R}_{iF} – вектор реакций от внешней нагрузки; \vec{Z}_i – вектор искомых перемещений.

В матрице реакций различают «главные» реакции $r_{11}, r_{22}, \dots, r_{nn}$, имеющие индексы $i = j$, и побочные реакции $r_{12}, r_{13}, \dots, r_{1,n}$ и т.д., у которых $i \neq j$.

$$\vec{r}_{ij} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix}; \quad \vec{R}_{iF} = \begin{bmatrix} R_{1F} \\ R_{2F} \\ \dots \\ R_{nF} \end{bmatrix}; \quad \vec{Z}_i = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \dots \\ Z_n \end{bmatrix}. \quad (8.6)$$

«Главные» реакции всегда положительны. Побочные реакции могут иметь любой знак и обладают свойством взаимности, т.е. $r_{ij} = r_{ji}$.

Матрица жёсткости \vec{r}_{ij} обладает рядом свойств:

определитель этой матрицы всегда положителен;

матрица \vec{r}_{ij} всегда симметрична относительно главной диагонали;

произведение двух «главных» реакций всегда больше квадрата

соответствующего побочного перемещения $r_{ii}r_{jj} > r_{ij}^2$.

Для определения значений элементов r_{ij} матрицы реакций строят эпюры моментов \overline{M}_i от перемещений $Z_i = 1$ условных заделок и связей. На рис. 8.4 показаны такие эпюры, построенные для основной системы, изображённой на рис. 8.3. Значения ординат эпюр \overline{M}_i взяты из прил. 2.

В строительной механике имеются два метода определения значений

элементов r_{ij} матрицы реакций: 1) кинематический, который основан на правиле П.Верещагина (аналогично определению перемещений) путём перемножения эпюр; 2) статический, использующий уравнения равновесия.

Наиболее рациональным методом определения реактивных усилий r_{ij} является статический метод. В соответствии с этим методом используют два уравнения статики – либо уравнение моментов $\sum M = 0$, либо сумму проекций на ту или иную ось, например $\sum y = 0$, сил, действующих на рассматриваемую часть основной системы метода перемещений.

Рассмотрим в качестве примера определение реактивных усилий r_{ij} по эпюрам, показанным на рис. 8.4.

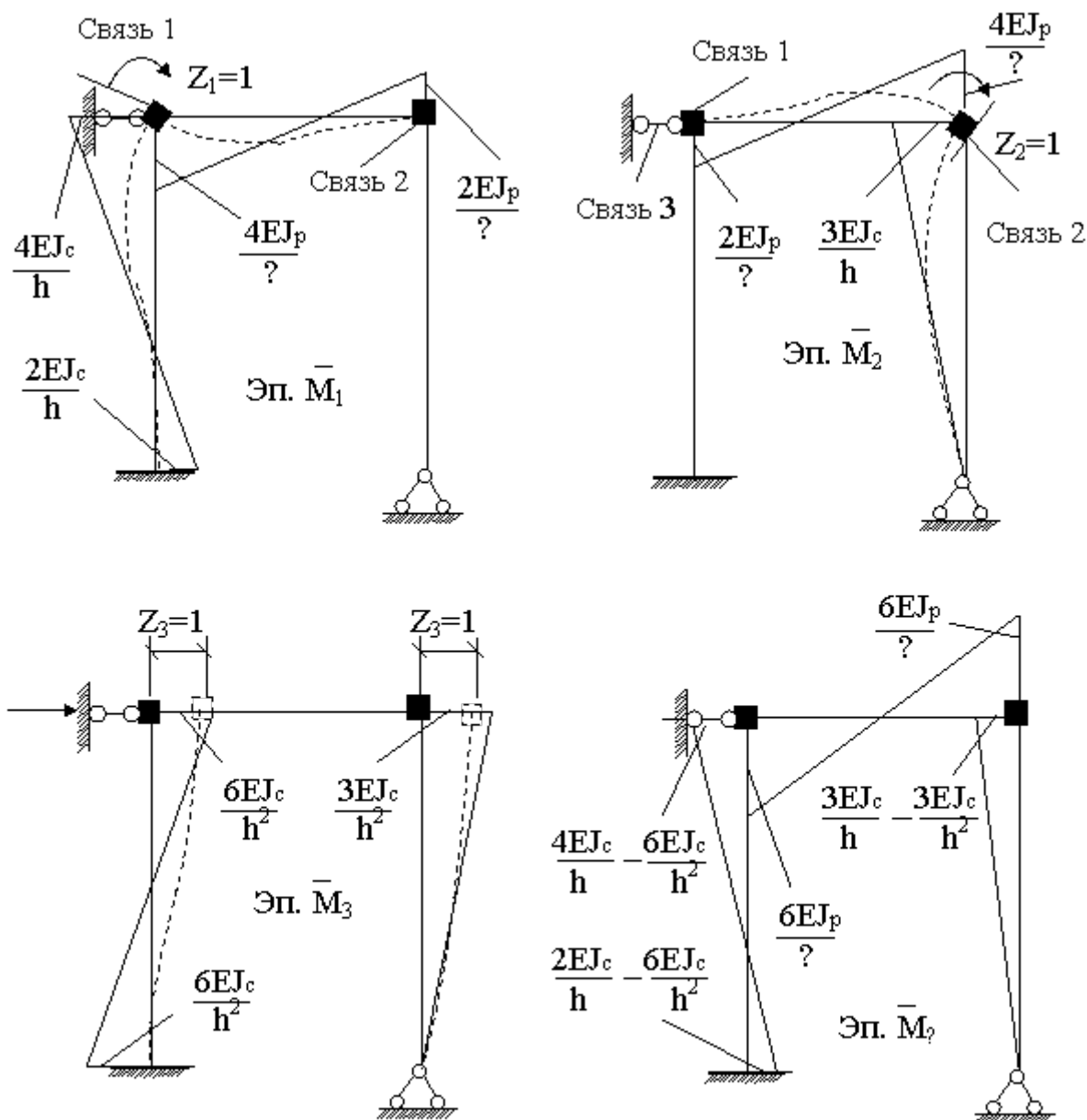


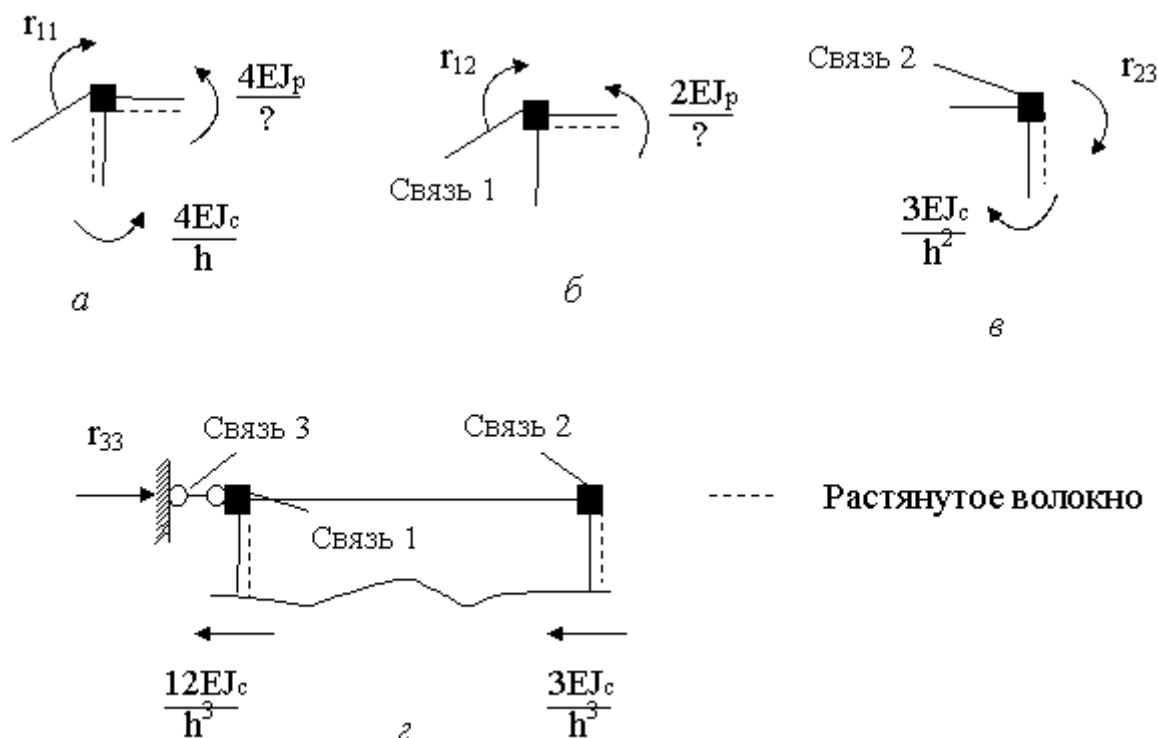
Рис. 8.4

$Z_3=1$

Для определения, например, реактивного усилия r_{11} , которым является изгибающий момент в условной заделке 1 от поворота этой заделки на единицу, мысленно вырежем на эюре \bar{M}_1 узел 1 (рис. 8.5, а). Реактивный момент r_{11} направлен в сторону заданного перемещения Z_1 . Рассматривая равновесие этого

узла, запишем

$$\sum M = r_{11} - \frac{4EJ_p}{\ell} - \frac{4EJ_c}{h} = 0 \Rightarrow r_{11} = \frac{4EJ_p}{\ell} + \frac{4EJ_c}{h}.$$



Реактивное усилие r_{12} представляет изгибающий момент, возникающий в условной заделке 1 от поворота условной заделки 2 на единицу.

В соответствии с этим на эпюре \overline{M}_2 мысленно вырежем узел 1 (см. рис. 8.5) и снова составим уравнение равновесия:

$$\sum M = r_{12} - \frac{2EJ_p}{\ell} = 0 \Rightarrow r_{12} = \frac{2EJ_p}{\ell}.$$

Проводя аналогичные рассуждения, нетрудно найти реактивное усилие (см. рис.

8.5, в) $r_{23} = -\frac{3EJ_c}{h^2}$. В случае, если реактивным усилием является продольное усилие в условной связи (в данном случае это условная связь 3) уравнение

равновесия представляет собой $\sum x = 0$. Для того чтобы составить это

уравнение на эпюре (эпюра \overline{M}_3), построенной от линейного перемещения условной связи 3, мысленно делают сечение и рассматривают равновесие (рис. 8.5, г) оставшейся части рамы.

В рассматриваемом примере
$$\sum x = r_{33} - \frac{12EJ_c}{h^3} - \frac{3EJ_c}{h^3} = 0 \Rightarrow r_{33} = \frac{15EJ_c}{h^3}.$$

Для оценки правильности вычисления коэффициентов r_{ij} строят суммарную единичную эпюру \bar{M}_Σ (см. рис. 8.4).

Произведение этой эпюры самой на себя должно давать сумму всех коэффициентов при неизвестных.

$$\frac{\partial n.\bar{M}_\Sigma \cdot \partial n.\bar{M}_\Sigma}{EJ} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij}. \quad (8.7)$$

В случае невыполнения равенства (8.7) проводят построчную проверку.

$$\begin{aligned} \sum \frac{\partial n.\bar{M}_\Sigma \cdot \partial n.\bar{M}_1}{EJ} &= r_{11} + r_{12} + \dots + r_{1n}; \\ \sum \frac{\partial n.\bar{M}_\Sigma \cdot \partial n.\bar{M}_2}{EJ} &= r_{21} + r_{22} + \dots + r_{2n}; \\ \sum \frac{\partial n.\bar{M}_\Sigma \cdot \partial n.\bar{M}_n}{EJ} &= r_{n1} + r_{n2} + \dots + r_{nn}. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Для определения свободных членов R_{iF} системы канонических уравнений (8.4) метода перемещений в основной системе строят так называемую грузовую эпюру M_F^0 , показанную на рис. 8.6.

При построении этой эпюры используют стандартные решения из прил. 3.

Значения R_{iF} находят, используя те же методы, которые используются для определения коэффициентов r_{ij} . Так, для определения значения реактивного усилия R_{1F} мысленно вырезают узел 1, а усилия R_{2F} – узел 2. Из уравнений

равновесия находят соответственно $R_{1F} = \frac{Fh_c}{8} - \frac{ql^2}{12}$ и $R_{2F} = \frac{ql^2}{12}$. Реактивное

усилие R_{3F} , которым в данной задаче является продольное усилие в условной связи 1, определяют, мысленно делая сечение на эпюре M_F^0 по стойкам близко

к ригелю. Из суммы проекций на горизонтальную ось можно найти $R_{3F} = -\frac{F}{2}$.

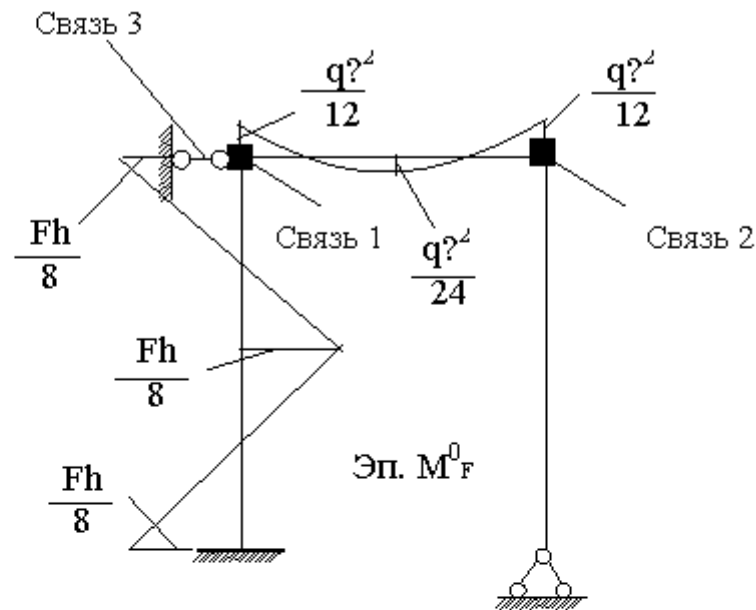
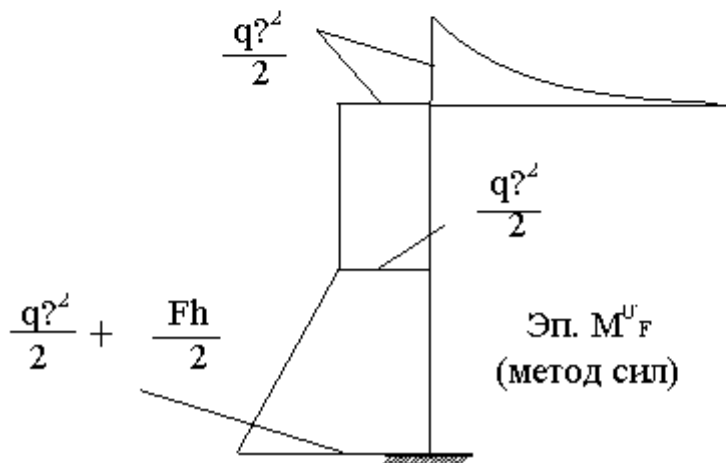


Рис. 8.6



Проверка правильности определения значений R_{iF} осуществляется в соответствии с выражением

$$\sum \frac{\Delta n \bar{M}_{\Sigma} \cdot \Delta n M_F^0 (\text{мет. сил})}{EJ} = - \sum_{i=1}^n R_{iF}, \quad (8.9)$$

где $\Delta n M_F^0$ – эпюра изгибающих моментов (рис. 8.7) от внешней нагрузки, построенная в любой статически определяемой системе, являющейся основной системой метода сил рассчитываемой заданной системы.

Найденные значения коэффициентов при неизвестных r_{ij} и свободных членов R_{iF} подставляют в систему (8.4) канонических уравнений метода перемещений и решают любым известным в линейной алгебре способом.

В результате решения системы канонических уравнений метода перемещений находят значения Z_i искомых перемещений. Нахождение искомых значений перемещений Z_i означает, что заданная к расчёту (заданная система) стержневая конструкция становится кинематически определимой.

Все внутренние усилия, возникающие в поперечных сечениях стержней от найденных перемещений Z_i и от заданной внешней нагрузки, могут быть в соответствии с принципом суперпозиции определены из выражения

$$M = \sum_{i=1}^n \bar{M}_i \cdot Z_i + M_F^o \quad (8.10)$$

Необходимым контролем правильности построения эпюры M является условие равновесия изгибающих моментов в жёстких узлах рассчитываемой

конструкции. В основной системе метода перемещений единичные \bar{M}_i и грузовая M_F^o эпюры являются неуравновешенными. Но единичные эпюры \bar{M}_i , будучи каждая умноженная на соответствующее ей перемещение Z_i и

сложенные друг с другом и грузовой эпюрой M_F^o , обязательно должны в итоге давать эпюру моментов M с уравновешенными в жёстких узлах моментами.

Отмеченное условие правильности построения итоговой эпюры моментов M является необходимым, но недостаточным. Достаточным условием правильности построения эпюры M является проведение деформационной проверки, суть которой изложена в разделе 6 настоящего курса. При этом не имеет значения, с использованием какого метода – метода сил или метода перемещений – построена итоговая эпюра моментов M . Поэтому для проведения деформационной проверки из заданной рассчитываемой системы выбирают любую основную систему метода сил, в которой строят любую эпюру моментов \bar{M}_i от действия неизвестной силы $X_i = 1$. Соблюдение

условия
$$\frac{\Delta_n M \cdot \Delta_n \bar{M}_i (\text{мет. сил})}{EJ} = 0$$
 свидетельствует о правильности построения эпюры M .

Построение эпюр поперечных Q и продольных N сил осуществляют точно так же, как это делается (см. раздел 6 настоящего курса) при решении статически неопределимых задач методом сил.